



## LEZIONE 7

### La deflessione gravitazionale “in grande”

Col problema 4 della scorsa lezione abbiamo visto che la deflessione c'è, ma per misurarla dobbiamo usare “un laboratorio più grande.” L'idea è di usare tutta la Terra come laboratorio, visto che l'entità della deflessione angolare è proporzionale alla distanza percorsa dalla luce.

Nasce però una difficoltà: non si può usare tranquillamente il PE perché esso vale in un rif. in caduta libera in cui la gravità si cancella. Ma è chiaro che se la luce percorre uno spazio delle dimensioni della Terra tale rif. non esiste: la gravità non si cancella perché il campo gravitazionale non è costante, né in grandezza né in direzione. Perciò per fare il calcolo occorrono conoscenze più approfondite, ossia la RG vera e propria.

Accontentiamoci di cercare soltanto l'ordine di grandezza. È chiaro che l'effetto è maggiore quando la distanza è minima, e diminuisce quando il raggio si allontana dalla superficie terrestre. Cerchiamo allora di cavarcela con un compromesso: poniamo che  $g$  sia costante per un tratto pari a  $2R$  (diametro terrestre) e nulla fuori. Allora siamo nelle condizioni dell'ascensore, e troviamo:

$$\vartheta = \frac{2gR}{c^2} = \frac{2GM}{c^2R} \simeq 10^{-9} \text{ rad.}$$

Come vedete, anche in questa situazione siamo molto al di sotto di ciò che gli strumenti attuali permettono di misurare. Se però invece della Terra usassimo il Sole, nel calcolo cambierebbero soltanto la massa e il raggio: otterremmo

$$\vartheta \simeq 2 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \simeq 0.8''$$

e questo è un angolo che con le tecniche astronomiche può essere misurato. Il calcolo esatto, fatto con la RG, porta all'espressione:

$$\vartheta = \frac{4GM}{c^2R} \quad (7-1)$$

che differisce dalla nostra solo per un fattore 2: l'ordine di grandezza è quindi corretto.

A questo punto possiamo riprendere il discorso già fatto nella seconda lezione, e la relativa figura (fig. 7-1). Ho già raccontato la storia di queste misure e le difficoltà che si presentano. Ho anche accennato che negli ultimi anni si è aggiunta una nuova possibilità: quella di usare le quasar.

Le quasar sono radiosorgenti, con forte emissione a lunghezze d'onda molto più lunghe del visibile. Sono sorgenti piccole, non estese, praticamente puntiformi, (il nome indica appunto “quasi stellari”). È il caso di ricordare, anche se non ha importanza per i nostri scopi attuali, che le quasar appaiono piccole perché sono estremamente distanti (come è mostrato dal grande redshift, di cui parleremo più avanti). Debbono quindi essere anche estremamente intense, e il meccanismo di un'emissione così intensa ha sempre dato da discutere.

Le posizioni delle quasar possono essere misurate con precisione usando i radiotelescopi, o meglio i radiointerferometri a grande base, il che implica un'altissima risoluzione.

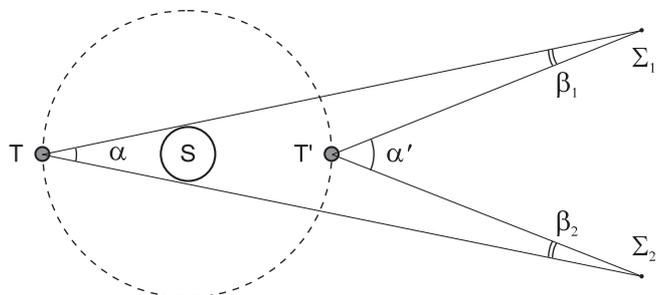


fig. 7-1

Il fatto di non lavorare nel visibile offre molteplici vantaggi:

1. Non occorre più aspettare un'eclisse di Sole, ma le misure possono essere fatte in qualunque giorno dell'anno, in qualunque ora del giorno o della notte, e in qualunque località.
2. Non abbiamo più bisogno del cielo sereno, poiché le nuvole non influenzano la propagazione delle onde e.m. nel campo radio.

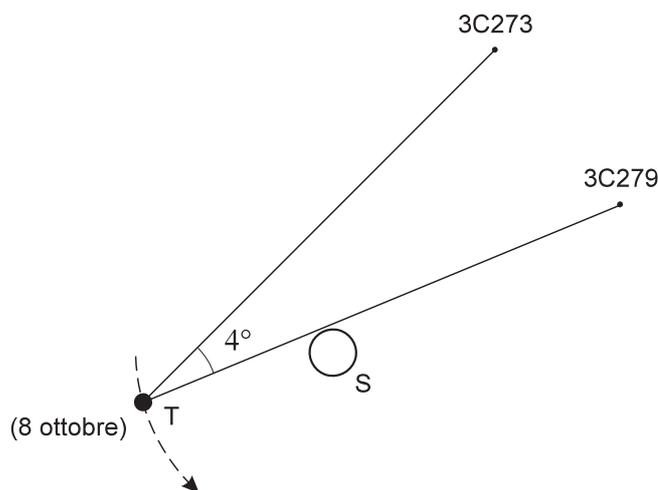


fig. 7-2

È sufficiente che una delle due radiosorgenti sia vicina al Sole, nel senso della nostra linea di vista, perché solo allora la deflessione è abbastanza grande. Per anni si è sfruttato il fatto che esiste una coppia di quasar come indicate in fig. 7-2, fatte apposta per i nostri scopi. I nomi delle due radiosorgenti indicano semplicemente i n. 273 e 279 del catalogo di Cambridge delle radiosorgenti (classe 3). Sono piuttosto intense e formano tra loro un angolo abbastanza piccolo, circa  $4^\circ$ .

Una di esse è occultata dal Sole, una volta l'anno, mentre l'altra no. Possiamo quindi misurare l'angolo che

separa le quasar quando sono lontane dal Sole e quando invece una delle due appare radente al Sole. Immediatamente prima dell'occultazione la quasar si trova vicina al bordo del Sole, perciò la radiazione che arriva a noi viene deviata dell'angolo (7-1), che per il Sole vale  $1.75''$ . Quando poi il Sole passa oltre, la quasar riappare all'altro bordo e la radiazione viene deviata in senso contrario.

Che cosa sono gli interferometri a grande base, di cui ho parlato poco fa? Sappiamo che la risoluzione angolare di un telescopio è inversamente proporzionale al suo diametro. Usando più radiotelescopi, distanti migliaia di chilometri l'uno dall'altro, che lavorano in sincronismo, si realizza un interferometro la cui risoluzione è quella di un telescopio di diametro pari alla distanza fra i telescopi singoli. Si arriva così a qualche millesimo di secondo d'arco.

Giocando poi sul fatto che questa situazione si può ripetere tutti gli anni senza condizionamento di eventi meteorologici, si guadagna in precisione ripetendo la misura più volte. Oggi è possibile misurare la deflessione gravitazionale anche per radiosorgenti lontanissime dal Sole (a  $90^\circ$  di distanza angolare dal Sole). Il risultato è che la previsione di Einstein è verificata meglio dell'uno per mille, e per un largo intervallo di distanze del percorso della luce dal centro del Sole.

## Lenti gravitazionali

Immaginiamo che una quasar stia dietro a una certa distribuzione di materia di densità variabile (galassia), fatta sostanzialmente di stelle e di gas, trasparente alla radiazione e.m.: come qualunque distribuzione di materia, essa produce una deflessione gravitazionale. A differenza del Sole però non è costituita da materia concentrata; perciò l'angolo di deflessione non decrescerà inversamente alla distanza dal centro, ma varierà in modo più complicato, come accennato nella fig. 7-3.

Nel caso in figura, della sorgente originale vediamo tre immagini: una è la sorgente vera e le altre due sono sue immagini virtuali. La distribuzione di materia è però tridimensionale, e questo rende possibile la formazione di più immagini. Ci sono casi in cui di una quasar si vedono 5 immagini, disposte a croce.

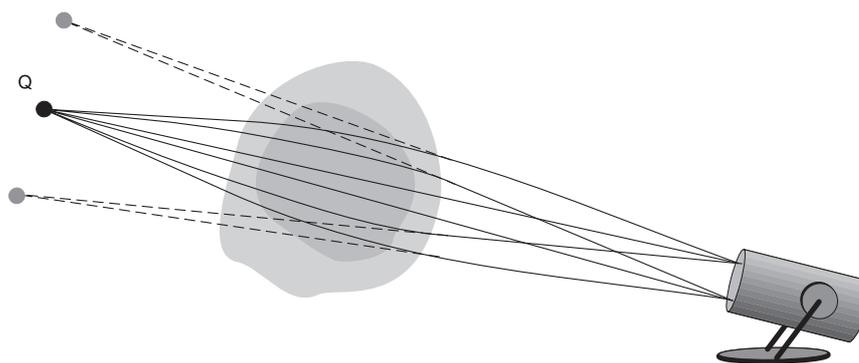


fig. 7-3

Ma come possiamo riconoscere se le varie immagini si riferiscono alla stessa quasar o sono semplicemente sorgenti distinte? Basta esaminare lo spettro: le quasar emettono anche nel visibile e nel loro spettro presentano righe di assorbimento, tipiche degli spettri stellari. Come ho già accennato, le quasar sono sorgenti molto lontane, quindi le righe hanno un notevole redshift (cosmologico), la cui entità dipende dalla distanza della sorgente (in prima approssimazione è proporzionale alla distanza: legge di Hubble). Se i redshift delle varie immagini coincidono, è ragionevole supporre che si tratti di un'unica sorgente.

### Le verifiche “classiche” della RG

Si chiamano così le verifiche dei tre effetti già previsti da Einstein:

1. precessione del perielio di Mercurio.
2. deflessione gravitazionale della luce
3. redshift gravitazionale

#### *La precessione del perielio di Mercurio:*

Ho già accennato nella seconda lezione a “un indizio trascurato,” e ho ricordato che questo comportamento “strano” di Mercurio fu spiegato da Einstein come conseguenza delle sue equazioni, appena trovate, e senza bisogno di nessuna ipotesi addizionale. Purtroppo una spiegazione del modo come la precessione risulta dalla RG è decisamente al di fuori delle possibilità di una presentazione elementare, quindi dobbiamo rinunciare a descriverla.

Questo non vuol dire però che l'argomento debba essere ignorato: al contrario, si tratta di un esempio straordinario per capire che cos'è una teoria scientifica e il suo potere predittivo. Einstein non costruì la RG per spiegare il moto di Mercurio: seguì una linea di ragionamento del tutto diversa. Ma una volta arrivato alle equazioni che collegavano la massa del Sole e la curvatura dello spazio-tempo nel suo intorno, quel comportamento di Mercurio ne seguiva con inderogabile necessità! Il 17 gennaio 1916 Einstein scriveva a P. Ehrenfest: “Per alcuni giorni, sono rimasto fuori di me per l'eccitazione e per la gioia.”

#### *La deflessione gravitazionale della luce:*

Questa, come la seguente, è una vera e propria previsione, nel senso di un fenomeno che discende dalla teoria ma a quel tempo non era mai stato osservato.

Abbiamo già detto che su piccola scala possiamo descrivere la deflessione partendo dal fatto che la radiazione e.m. deve andare in linea retta in un RI (in caduta libera); ma vista dalla Terra, che non è un RI nel senso di Einstein, la luce curva la sua traiettoria. Noi diciamo impropriamente “a causa della forza di gravità.” In poche parole, ancor più impropriamente: la luce viene deflessa da un campo gravitazionale.

Esiste in proposito un complesso di discorsi confusi che si trovano di frequente nelle trattazioni divulgative (ma non solo ...). Vi espongo la linea del ragionamento, anche

se per ora non posso darne la critica puntuale. Si dice: per l'equivalenza massa-energia, anche un fotone, che trasporta energia, ha massa. Ma ogni massa inerziale è anche gravitazionale, quindi soggetta a forza in un campo gravitazionale. Da qui segue che anche la luce non può viaggiare in linea retta in un campo gravitazionale, ma viene deviata.

Sulla cosiddetta "equivalenza massa-energia" tornerò ampiamente a suo tempo e mostrerò quanto scorretto sia usarla al modo appena visto. Per ora non aggiungo altro.

Tornando alla deflessione dedotta dal PE, vi ricordo che su grande scala, in un campo non uniforme, il semplice discorso del rif. non inerziale non funziona. Purtroppo questo è uno dei punti dove una trattazione elementare deve arrestarsi.

### *Il redshift gravitazionale:*

Consideriamo l'astronave accelerata (problema 5 della scorsa lezione): abbiamo già visto che in essa c'è una variazione tra la frequenza emessa alla base e quella rivelata alla sommità (una diminuzione se l'onda e.m. si propaga nella direzione in cui l'astronave accelera).

Per il PE questo deve accadere anche sulla Terra, in presenza di un campo gravitazionale, perché l'astronave accelerata equivale a un rif. fermo in un campo gravitazionale. Quindi: un campo gravitazionale produce un redshift (*gravitazionale*, da non confondere con quello cosmologico, di cui riparleremo).

Notate che per questo ragionamento si usano tre sistemi di riferimento:

- $K_0$ : RI in assenza di gravità, di cui abbiamo bisogno per fare i conti in partenza
- $K'$ : rif. dell'astronave accelerata
- $K$ : rif. fermo sulla Terra.

Quello che succede in  $K'$  succede anche in  $K$  alla stessa maniera; quindi se nell'astronave accelerata si vede un certo effetto, questo si deve vedere pure sulla Terra.

In altre parole: se prendiamo l'astronave, e invece di mandarla nello spazio con i motori accesi la lasciamo sulla Terra, corredata degli stessi strumenti di misura, si dovrà notare (registrare, misurare) lo stesso effetto. Einstein nel 1911 proprio con questo ragionamento fa la prima previsione dell'esistenza del redshift gravitazionale.

Se metto sul pavimento un trasmettitore e sul soffitto un ricevitore, la frequenza della radiazione rivelata è più piccola di quella emessa secondo la relazione che abbiamo già scritta:

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = -\frac{v}{c} = -\frac{gh}{c^2}. \quad (7-1)$$

### *Commenti e note:*

1. Il ragionamento è approssimato: vale se  $\frac{1}{2}gt^2 \ll h$  ossia se  $gh/c^2 \ll 1$ , e se il campo gravitazionale può essere ritenuto uniforme.
2. Stessa considerazione per l'effetto Doppler, che si tratta al primo ordine in  $v/c$ .

La prima verifica sperimentale (Pound e Rebka) è del 1960 ed è stata possibile grazie all'effetto Mössbauer. Si usano i  $\gamma$  molli emessi dal  $^{57}\text{Fe}$  (prodotto di decadimento del  $^{57}\text{Co}$ ). L'effetto Mössbauer consiste nel fatto che i nuclei che emettono i fotoni sono "legati" al cristallo, e questo fa sì che la riga emessa sia molto stretta (larghezza relativa dell'ordine di  $10^{-12}$ ).

Abbiamo visto però che sulla Terra  $\delta\nu/\nu = 10^{-16}$  per metro di dislivello; nel primo esperimento il dislivello era 25 m, quindi la variazione di frequenza era molto minore della larghezza delle righe. Si è dovuto perciò ricorrere a espedienti raffinati, di cui qui non possiamo parlare.

Per una sorgente astronomica (Sole, stelle) l'approssimazione  $gh/c^2 \ll 1$  non è più valida perché  $h$  è la distanza Sole–Terra o stella–Terra, e certo il campo non è uniforme. Dal punto di vista di un omino sulla superficie del Sole, la situazione è analoga a quella già trattata, perché la luce “sale” nel campo gravitazionale, ma poi la gravità diminuisce con la distanza... Il calcolo esatto, condotto con le relazioni complete della RG, conduce all'espressione:

$$\frac{\nu_r}{\nu_e} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}$$

Per il Sole  $2GM/c^2 R$  vale circa  $4 \cdot 10^{-6}$ , quindi l'effetto sarebbe molto maggiore che sulla Terra. La difficoltà è però di conoscere la frequenza emessa, per più ragioni:

- presenza di campi magnetici, che allargano le righe per effetto Zeeman
- moti convettivi, che producono effetto Doppler
- ulteriore allargamento delle righe dovuto alla pressione (interazione di un atomo con quelli vicini).

Il risultato è che non ci sono verifiche convincenti nel caso del Sole.

La situazione è migliore per le nane bianche (stelle molto compatte, con massa circa pari a quella del Sole ma con raggio molto più piccolo, dell'ordine di 10 000 km): in questo caso il redshift vale circa  $10^{-4}$ . Qui la difficoltà è un'altra: distinguere il redshift gravitazionale dal “banale” effetto Doppler, dovuto al moto della stella rispetto a noi.

Infatti per la gran parte delle stelle l'unico modo per rivelare quel moto è proprio l'osservazione di uno spostamento delle righe spettrali, verso il rosso o verso il blu. Stando così le cose, siamo in un giro vizioso: non possiamo usare lo spostamento osservato per misurare la velocità, e poi sperare di rivelare allo stesso tempo il redshift gravitazionale!

Per fortuna ci sono alcune nane bianche vicine, per le quali è stato possibile ricavare il moto da misure esclusivamente geometriche (non posso ora addentrarmi nei dettagli). In questi casi si è riusciti a rivelare il redshift gravitazionale, ma c'è un altro problema: nella formula entrano massa e raggio della stella, che non sono noti. Esiste solo la teoria che fornisce una relazione fra massa e raggio: mettendo insieme teoria e osservazioni, si arriva quindi a determinare i due parametri, ottenendo valori del tutto ragionevoli. Di più non si riesce a fare.

Nel 1911 Einstein diede un'altra dimostrazione del redshift gravitazionale, indipendente dalla precedente e basata sull'inerzia dell'energia. Detto molto in breve, il ragionamento (esperimento ideale) è questo:

- a) Si prende un corpo di data massa e lo si solleva a una certa altezza, facendo un certo lavoro.
- b) S'invia al corpo una certa quantità di energia sotto forma di radiazione. Il corpo l'assorbe, e la sua massa aumenta.
- c) Si riporta il corpo in basso, ricavando più lavoro di quello ceduto.
- d) Gli si sottrae l'energia assorbita.

Se non ci fosse il redshift, il giochetto ci permetterebbe di tirar fuori più energia di quanta ne abbiamo data.

Ma di questa dimostrazione non possiamo parlare adesso, prima di aver trattato l'argomento centrale: appunto l'inerzia dell'energia.

### Nota didattica

Nella s.s.s. la deflessione gravitazionale della luce può essere affrontata piuttosto presto: è un fatto abbastanza elementare che non presenta punti critici. È sufficiente che i ragazzi abbiano capito il PE. Il redshift gravitazionale è molto più complesso. Per ricavarlo occorre usare tre rif., passare nel modo giusto da uno all'altro, usare correttamente il PE, ecc.

Ma soprattutto mi preoccupa il rischio che parlando di redshift gravitazionale si lascino entrare senza volerlo nella testa degli studenti strane idee circa “la gravità che rallenta gli orologi” o addirittura “che rallenta il tempo.” Più avanti vi proporrò una strada diversa per ragionare su questi fenomeni. Ho raccontato il redshift gravitazionale come applicazione del PE solo per seguire lo sviluppo storico; oggi, a 85 anni di distanza, è meglio non seguire questa strada. Abbiamo altri fatti sperimentali, altri strumenti, altre tecniche; per cui a mio parere esistono percorsi didatticamente più adatti.

### Problemi

1. Gli effetti che abbiamo discussi dipendono tutti dal rapporto tra la grandezza  $GM/c^2$  e il raggio (della Terra, del Sole. . .).  $GM/c^2$  ha le dimensioni di una lunghezza. Nasce perciò l'idea di usare unità di misura in cui  $G = 1$ ,  $c = 1$ , sì che massa ed energia abbiano dimensioni di una lunghezza.

Calcolare:

- la massa in kg pari a 1 metro
- la massa della Terra in metri
- la massa del Sole in metri.

2. Esiste un'analogia fra le lenti gravitazionali e il miraggio? Spiegare.

3. Per un oggetto di massa pari al Sole, a che distanza la luce gli girerebbe intorno in cerchio?

4. Che succede se si prova a sincronizzare, in un'astronave accelerata, due orologi uno a poppa ed uno a prua?

### Risposte

*Problema 1.* (Unità geometriche di massa):

Posto  $R = GM/c^2$ , tutto si riduce a calcolare  $M$  dato  $R$  o viceversa. Poiché  $M_{\oplus} = 5.97 \cdot 10^{24}$  kg e  $M_{\odot} = 1.99 \cdot 10^{30}$  kg, le risposte sono:

- 1 metro equivale a  $1.35 \cdot 10^{27}$  kg.
- La massa della Terra è  $4.44 \cdot 10^{-3}$  m.
- La massa del Sole è  $1.48 \cdot 10^3$  m.

*Problema 2.* (Lenti gravitazionali e miraggio):

L'analogia esiste, in questo senso. Nel caso del miraggio, la luce che proviene dall'oggetto può raggiungere l'occhio dell'osservatore per due (o più) vie: quella diretta, e il percorso incurvato in prossimità della superficie calda del terreno. Questo dà l'impressione di una sorgente sdoppiata.

Nel caso di una lente gravitazionale accade qualcosa di simile: la luce che proviene da una sorgente lontana viene deflessa da un corpo interposto (tipicamente una galassia). Può accadere che la luce arrivi al telescopio per più percorsi diversi (anche 5) producendo quindi altrettante immagini dello stesso oggetto (fig. 7-3).

La differenza sta nella causa fisica della deviazione: nel miraggio si tratta di variazioni dell'indice di rifrazione dell'aria con la temperatura; nella lente gravitazionale invece è la geometria dello spazio-tempo attorno alla lente che è deformata e altera la propagazione della luce.

*Problema 3.* (La luce in cerchio):

Nel problema 6 della scorsa lezione abbiamo trovato l'equazione cartesiana del raggio di luce:

$$y = \frac{g x^2}{2 c^2}.$$

Da questa si ottiene  $y'' = g/c^2$ , quindi il raggio di curvatura nel vertice della parabola è  $\varrho = c^2/g$ .

D'altra parte  $g = GM/R^2$ , quindi

$$\varrho = \frac{c^2 R^2}{GM}.$$

Basta imporre  $\varrho = R$ , e si arriva a  $R = GM/c^2 = 1.48 \cdot 10^3$  m come abbiamo visto nel problema 1.

Però questo calcolo può dare solo l'ordine di grandezza, non il risultato esatto: infatti le equazioni della RG portano a un valore 3 volte maggiore. Come mai?

Non possiamo certo spiegare il fattore 3, ma possiamo renderci conto dell'approssimazione insita nel calcolo. La soluzione del problema 4, nella scorsa lezione, ha fatto uso del PE: ci siamo messi in un ascensore in caduta libera nel campo della Terra, ecc. Questo è del tutto corretto, e non implica nessuna approssimazione. Ma ora abbiamo usato per  $g$  l'espressione newtoniana  $GM/R^2$ , e ciò è accettabile solo se il campo gravitazionale è debole, ma non lo è nelle condizioni di questo problema.

Amche la trasformazione dal rif. in caduta libera a quello "fermo," che è stata fatta secondo le prescrizioni galileiane, non possiamo aspettarci che conservi validità nelle nuove condizioni. Si noti: non a causa della velocità relativa dei due rif., che sarà piccola, visto che interessa solo l'inizio della caduta; ma perché lo spazio-tempo è fortemente deformato. Per esempio, la misura del tempo nei due rif. non è certo la stessa; ma per ora non possiamo dire di più.

*Problema 4.* (Orologi nell'astronave accelerata):

Il problema 5 della lezione precedente ci ha portato alla formula

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = -\frac{ah}{c^2}$$

per la variazione di frequenza, nel senso che un segnale emesso con frequenza  $\nu$  a poppa arriva a prua con frequenza  $\nu' = \nu + \delta\nu$  ( $\delta\nu < 0$ ).

Se a poppa c'è un orologio, nel tempo  $T$  segnato da questo il trasmettitore emetterà  $N = \nu T$  cicli del segnale, che verranno ricevuti a prua nello stesso numero  $N$ , ma con frequenza minore. La durata del segnale ricevuto sarà dunque

$$T' = \frac{N}{\nu'} = \frac{N}{\nu + \delta\nu} = T \left(1 - \frac{\delta\nu}{\nu}\right) = T \left(1 + \frac{ah}{c^2}\right).$$

Dunque i due orologi non sono sincronizzati: mentre quello di poppa segna il tempo  $T$ , quello di prua segna  $T' > T$ . Ho di proposito usato "mentre," parola che nel linguaggio comune dà il senso di una contemporaneità, proprio per indicare come ci si può far influenzare da usi linguistici. . .

In realtà la sola cosa che si può dire è che l'intervallo segnato dal primo orologio durante l'emissione del segnale è più breve di quello segnato dal secondo durante la ricezione dello stesso segnale; ma su quale sia la corretta *interpretazione* di questo *fatto*, dovremo discutere.

