LEZIONE 16

I modelli cosmologici

Il discorso sui modelli cosmologici va necessariamente semplificato; non tanto per necessità didattiche, quanto perché anche a livello scientifico una trattazione accurata è possibile solo con modelli semplici. Quando si tenta d'introdurre ipotesi un po' più realistiche, i calcoli diventano subito così complicati che si comincia ad avere difficoltà a interpretarli.

Fare un modello cosmologico significa fare ipotesi sulla distribuzione di materia nell'Universo e sulla geometria dello spazio-tempo. Per affrontare il primo problema bisogna fare un salto mentale, e guardare l'Universo più o meno con lo stesso atteggiamento cui siamo abituati quando studiamo un gas. Su scala microscopica un gas consiste di atomi, che a loro volta hanno dei costituenti interni; analogamente possiamo dire che le stelle nel loro insieme si raggruppano in oggetti compatti, che sono le galassie. Le galassie sono, grosso modo, gli "atomi" dell'Universo: nel senso che sono oggetti che si muovono come un tutto unico; a volte interagiscono, ma per la maggior parte del tempo si muovono indipendentemente l'una dall'altra; e ce ne sono tantissime, forse centinaia di miliardi. Ci sono almeno 6 ordini di grandezza fra le dimensioni di una galassia tipica e quelle dell'Universo visibile.

Quanto alla geometria dello spazio-tempo, ci torneremo fra poco. Osservo solo che *le due ipotesi non sono indipendenti* nel quadro della RG, dal momento che la teoria lega appunto la geometria alla distribuzione della materia.

Il principio cosmologico

La prima semplificazione fondamentale è di assumere che la densità di galassie — e quindi la densità di materia nell'Universo — sia la stessa dappertutto. Possiamo esprimere quest'ipotesi col *principio cosmologico* (PC): le proprietà fisiche dell'Universo sono le stesse in tutti i punti dello spazio e in tutte le direzioni; brevemente, *l'Universo è omogeneo e isotropo.* In realtà l'omogeneità è necessaria per avere l'isotropia. Se assumessi infatti che non c'è omogeneità nell'Universo, cioè che in una parte dell'Universo la materia è più concentrata che in un'altra, allora guardando nella prima direzione vedrei qualcosa di diverso che guardando nella seconda.

Ci si può chiedere che motivo abbiamo per fare un'ipotesi del genere; può sembrare un po' troppo semplice, anzi un po' troppo povera. In effetti è un'ipotesi che viene continuamente rimessa in discussione, ed è una questione centrale della problematica cosmologica di oggi. Però al livello di cui ci occupiamo noi, la sola possibilità è di limitarsi a dire: questo è l'unico modello semplice che si può fare; studiamone le conseguenze. Se le sue previsioni risultassero assolutamente in disaccordo coi dati di osservazione, cercheremmo di fare un modello più sofisticato. Del resto questo è un approccio comune nella pratica scientifica: si comincia con un modello semplice; se non funziona, se ne proverà uno più complicato.

Ciò non toglie che sia lecito domandarsi da dove nasce l'idea di un modello così semplice. Di fatto ci sono delle indicazioni. Ne cito tre, che in parte abbiamo già visto, in parte riesamineremo più avanti:

– la legge di Hubble
– la distribuzione delle galassie
– l'isotropia della radiazione di fondo.

Per prima cosa, la stessa legge di Hubble (ecco perché mi sono soffermato a trattarne) parla in favore dell'omogeneità. Abbiamo visto come la legge di Hubble c'insegni che — almeno per quanto riguarda il moto delle galassie — ciò che vediamo dal nostro osservatorio O non è diverso da ciò che vedremmo in O_1 o in O_2. Questo ci autorizza a pensare che gli osservatori O, O_1 e O_2 siano nelle stesse condizioni fisiche. Naturalmente non si tratta di una prova, ma solo di un indizio; che però parla a favore di un modello omogeneo.

Quanto alla distribuzione delle galassie, ho già parlato di ammassi e superammassi; però non ci sono indicazioni di disomogeneità su scala più grande, nel senso che la struttura ad ammassi e superammassi è presente in tutto l'Universo visibile allo stesso modo.(1)

Della radiazione di fondo parleremo più diffusamente in seguito.

Il problema del tempo

Prima di procedere oltre, vorrei tornare su di una questione che avevo momentaneamente lasciato da parte. Nell'applicazione didattica è bene essere più cauti, non eccedere nell'analisi critica, altrimenti si rischia di produrre solo confusione; ma è anche bene che l'insegnante abbia una visione più approfondita, e per questa ragione mi sembra opportuno sollevare il problema che segue.

Abbiamo visto che il PC parla di omogeneità spaziale dell'Universo; tuttavia nell'enunciarlo io non ho messo in evidenza il ruolo giocato dal tempo. Il problema non esisterebbe se l'Universo fosse *stazionario*; ma abbiamo visto che la distanza delle galassie aumenta, e quindi la densità della materia presumibilmente diminuisce nel tempo. Potremo dunque dire che l'Universo è omogeneo solo se lo guardiamo in un determinato istante: se potessimo fare una fotografia dell'intero Universo, *tutto allo stesso istante*, troveremmo che la densità di materia è la stessa dappertutto. A un istante diverso la densità cambia, ma cambia dovunque nello stesso modo.

Però questo apre nuovi problemi. Che significato ha parlare di "stesso istante" per tutto l'Universo? Come si fa a mettere d'accordo orologi che stanno a distanze cosmiche uno dall'altro? Non potrebbe darsi che un discorso del genere sia addirittura privo di senso? Dobbiamo quindi chiarire che cosa intendiamo parlando di tempo per l'Universo nel suo insieme.

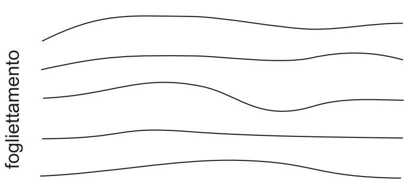

fig. 16–1

La questione è abbastanza semplice se la si guarda in modo astratto: consideriamo lo spazio-tempo (una varietà 4-dimensionale) e definiamo in esso una famiglia d'ipersuperfici di tipo spaziale (fig. 16–1). La forma di queste ipersuperfici può essere qualsiasi: occorre e basta che non s'intersechino, e che per ogni punto dello spazio-tempo ne passi una (una sola). Allora potremo parametrizzare la famiglia con una variabile reale t, e questo è il tempo di cui parliamo. Naturalmente ciò può farsi in infiniti modi, nessuno preferibile all'altro dal punto di vista matematico.

Ora possiamo riformulare il principio cosmologico in maniera più corretta, all'incirca così: è possibile "fogliettare" lo spazio-tempo (ossia definire una famiglia d'ipersuperfici spaziali come sopra) in maniera tale che se si misura la densità di materia in un punto di una determinata ipersuperficie, a un certo tempo t, si trova la stessa densità che si troverà in qualunque altro punto della stessa ipersuperficie. E per di più questo accade a ogni t. Chiameremo queste le "ipersuperfici di omogeneità."

Non basta: vogliamo anche che l'Universo appaia isotropo. È ovvio che ciò richiede che l'osservatore sia fermo rispetto alla materia vicina: se così non fosse, sarebbe facile

(1) In realtà in tempi più recenti si sono avute indicazioni secondo le quali a scala più grande l'Universo avrebbe una struttura a "bolle": grandi regioni quasi vuote, con superfici o filamenti dove si concentra la materia.

definire una direzione privilegiata, quella in cui la materia si muove. In termini geometrici, le linee orarie degli osservatori che vedono isotropo l'Universo sono ovunque ortogonali (nel senso della metrica dello spazio-tempo) alle ipersuperfici di omogeneità (fig. 16–2).

Che ciò sia possibile, ossia che esista una famiglia d'ipersuperfici di omogeneità, non è un fatto banale. Potrebbe anche accadere il contrario: se lo spazio avesse proprietà diverse nelle varie regioni, non si riuscirebbe a definire la famiglia in modo da trovare l'omogeneità.

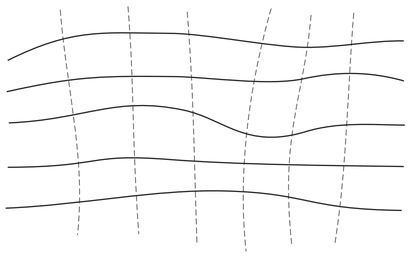

fig. 16–2

Penso sia chiaro perché ho premesso a questa discussione che non la presentavo a scopo didattico: il livello di astrazione richiesto è certamente superiore a quello dello studente medio (e non solo medio, direi).

Il modello di universo a curvatura costante

L'idea fondamentale che sta alla base della cosmologia costruita sulla teoria della gravitazione di Einstein, è che le proprietà dello spazio-tempo dipendano esclusivamente dalla distribuzione della materia. Per esempio abbiamo detto che lo spazio-tempo è curvo intorno al Sole appunto perché c'è il Sole, e abbiamo visto che la curvatura dipende dalla massa del Sole. Questo presupposto va adesso combinato col PC: se si ammette che la densità di materia è la stessa dappertutto, anche la curvatura dello spazio-tempo sarà la stessa dappertutto. Quindi abbiamo un modello di universo *a curvatura costante*.

Parlando di curvatura costante bisogna però fare attenzione: si tratta di costanza nello spazio, non nel tempo. Lo spazio-tempo è quadrimensionale: se consideriamo le sezioni tridimensionali a t assegnato, il PC ci dice che queste sezioni sono a curvatura (tridimensionale) costante. Però se la misuriamo a tempi successivi, la curvatura può benissimo cambiare. Anzi, dal momento che oggi sappiamo che l'Universo si espande, è chiaro che il raggio di curvatura va aumentando nel tempo.

Questo raggio di curvatura è il parametro cosmologico fondamentale, su cui gioca tutto il nostro discorso; ed è una funzione del tempo $R(t)$. Se noi sappiamo come varia il raggio di curvatura spaziale in funzione di t, abbiamo un modello cosmologico ben determinato. Per ora lasceremo tuttavia da parte il problema di come si fa a determinare $R(t)$; supporremo di conoscere questa funzione, e vedremo che cosa possiamo ricavarne.

In cosmologia $R(t)$ si chiama spesso "parametro di scala," anziché raggio di curvatura. Ci sono per questo due buone ragioni:
- esistono geometrie per le quali il termine "raggio" è poco appropriato (quelle a curvatura *nulla* o *negativa*)
- dato che al variare di R la sezione si espande o si contrae, cambiando "scala," il termine "parametro di scala" rende adeguatamente l'effetto dell'evoluzione nel tempo.

Digressione sugli spazi a curvatura costante

Prima di procedere con la cosmologia, occorre studiare un po' meglio che cos'è uno spazio a curvatura costante. Esistono solo tre tipi di spazi (tridimensionali) a curvatura costante, tradizionalmente contraddistinti dal valore di un parametro k:
- lo spazio euclideo ($k = 0$, curvatura nulla)
- lo spazio sferico ($k = 1$, curvatura positiva)
- lo spazio iperbolico ($k = -1$, curvatura negativa).

Purtroppo uno spazio tridimensionale curvo è un'idea poco intuitiva, perché lo spazio a cui siamo abituati è euclideo. Chiunque tenti di spiegare la cosa in maniera semplice ricorre a un'analogia, che consiste nel togliere una dimensione, cioè nello studiare uno spazio a curvatura costante *bidimensionale*. L'esempio più semplice di spazio bidimensionale a curvatura costante è la superficie di una sfera, della quale abbiamo una chiara immagine.

È però molto importante non commettere un errore. Noi abbiamo esperienza della superficie di una sfera, ci è familiare; però come superficie immersa in uno spazio tridimensionale. Si sarebbe così indotti a credere che se lo spazio tridimensionale è curvo, ciò vuol dire che esiste una quarta dimensione spaziale, in cui il nostro spazio s'incurva.

Invece questo non è né vero, né necessario. È forse il caso di ricordare che circa un secolo fa la "quarta dimensione" era di moda: si pretendeva tra l'altro che servisse a spiegare i presunti fenomeni spiritici. Non mi meraviglierei se qualcosa del genere rispuntasse fuori oggi, dato il risorgere di una serie di movimenti verso l'occulto: anche la televisione dà non poco spazio a idee del genere. Mettiamo insieme questa moda con certa pseudodivulgazione, che parla disinvoltamente di quarta dimensione nella cosmologia, e la frittata è fatta.

L'accenno che ho fatto alla quarta dimensione non va neppure confuso coll'idea del tempo come quarta dimensione dello spazio-tempo. Il mio discorso è: come la superficie di una sfera è una superficie bidimensionale immersa in uno spazio tridimensionale, così si può credere che per poter parlare di uno spazio curvo tridimensionale occorra aggiungere una quarta dimensione *spaziale* (e se si conta anche il tempo, si arriverebbe a cinque). In realtà si può benissimo concepire uno spazio tridimensionale curvo senza bisogno d'immergerlo in nient'altro: solo che si tratta di cosa lontana dalla nostra esperienza comune.

Le coordinate comoventi

Ragioniamo dunque sulla sfera: la superficie di una sfera S^2 sarà il nostro modello dell'Universo. Poiché l'Universo è in espansione, il raggio della sfera cresce al passare del tempo: e noi dobbiamo immaginare di vivere sopra questa sfera che cresce. La cosa che ora c'interessa di più è farci un'idea di come viaggia la luce in un universo così fatto.

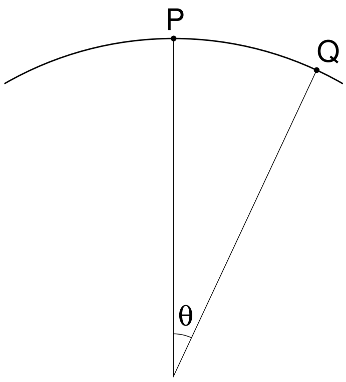

fig. 16–3

Cerchiamo prima di tutto di caratterizzare i punti di questa superficie con un sistema di coordinate. Dato che si tratta di una superficie sferica, le coordinate più naturali sono quelle polari. Scelto un polo P, avremo le coordinate ϑ e φ. L'angolo ϑ posso disegnarlo facilmente, mentre φ è meglio immaginarlo (fig. 16–3).

Se invece della sfera avessimo lo spazio sferico tridimensionale S^3, ci vorrebbe una terza coordinata polare χ. Questa è una cosa che suona un po' strana: nello spazio euclideo ci sono due angoli come coordinate polari, ma la terza è il raggio; invece in uno spazio sferico tridimensionale le tre coordinate polari sono tre angoli. Anche per evitare questa complicazione, conviene limitarsi alla superficie bidimensionale.

Il punto P della figura potremmo essere noi, mentre Q è un'altra galassia: Q è caratterizzato dagli angoli ϑ, φ. Il fatto che l'Universo si espande non fa cambiare le coordinate: se il raggio della sfera cresce, le coordinate ϑ e φ rimangono le stesse (ecco il vantaggio di aver usato degli angoli!) Dunque le coordinate polari di un determinato punto del "fluido cosmologico" (come si dice di solito), cioè di una determinata galassia, sono costanti. Possiamo dare ad es. la latitudine e la longitudine della galassia di Andromeda, la latitudine e la longitudine di una certa galassia dell'ammasso della Vergine, ecc. Ogni galassia è individuata dalle sue coordinate polari, che nel nostro modello sono due, e sono costanti, nonostante l'espansione. Per questo motivo le coordinate ϑ, φ (e anche la χ, se vogliamo ragionare in tre dimensioni) si chiamano *coordinate comoventi*.

Nota: La distanza da P a Q è un'altra cosa. Poiché noi viviamo sulla sfera, quando parliamo di distanza dobbiamo intendere l'arco di cerchio massimo — cioè di geodetica — sulla superficie della sfera. La distanza sarà naturalmente $R\vartheta$. Abbiamo detto che ϑ non cambia, però R cambia: quindi la distanza cambia, cresce nel tempo. Ne riparleremo tra poco.

Conviene riassumere qui alcune proprietà di S^3, che in parte sono uguali o analoghe a quelle di S^2, ma con qualcosa in più. S^3 è uno spazio *finito*, in diversi sensi:

- Se si procede in linea retta (geodetica) si torna al punto di partenza dopo aver percorso un tratto lungo $2\pi R$.
- Il volume totale vale $2\pi^2 R^3$.
- I punti che distano a da P stanno su una sfera S^2 di area $4\pi R^2 \sin^2(a/R)$, che si annulla per $a = \pi R$ (antipodo). (Si veda il problema 1.)

Prima di andare avanti, occorre rispondere a una domanda: come si fa a sapere se davvero lo spazio è curvo? Il discorso non è nuovo. Sappiamo che un modo di accorgersi che lo spazio è curvo è di tracciare una circonferenza e misurare quant'è lunga: se si scopre che non è 2π volte il raggio, ciò sta a dimostrare che lo spazio non è euclideo. Non solo: dalla misura, e dalla formula che abbiamo visto in precedenza, si può ricavare R.

Non si tratta naturalmente di un metodo pratico: come si fa a disporre tutti questi punti alla stessa distanza, e poi a misurare quant'è lunga la circonferenza? Per questo abbiamo discusso anche altri sistemi. Tuttavia il metodo è utile in linea di principio, perché aiuta a capire come si può determinare il raggio di curvatura.

Anche se non ci servirà in seguito, siamo al punto giusto per fare un'osservazione: non potrebbe la circonferenza risultare più lunga di $2\pi r$, anziché più corta? Questo è impossibile sulla sfera, ma esistono superfici a curvatura costante in cui ciò accade; e allo stesso modo esistono spazi tridimensionali a curvatura costante di questo tipo (sono gli spazi iperbolici di cui ho già parlato). Anche per i modelli cosmologici una tale possibilità non è esclusa, ed è connessa col problema se l'Universo sia finito o infinito, chiuso o aperto. Tuttavia non possiamo permetterci di affrontare anche questo argomento: perciò in tutto quanto segue, a parte accenni occasionali, ci limiteremo al modello a curvatura positiva.[(1)]

Cinematica e dinamica cosmologica

Abbiamo visto che tutto quanto occorre per caratterizzare la geometria dello spazio-tempo è la funzione $R(t)$: il suo andamento col tempo ci dice se l'Universo si espande, se l'espansione accelera o rallenta, ecc. Vedremo fra poco che in realtà la conoscenza di $R(t)$ permette di calcolare altri effetti osservabili: la parte della cosmologia che connette $R(t)$ con gli effetti osservabili si chiama talora "cinematica cosmologica."

C'è poi un altro problema: da che cosa dipende l'andamento di $R(t)$? Sappiamo, sia pure vagamente per ora, che deve entrarci la distribuzione della materia, attraverso le famose equazioni di Einstein. Studiare queste equazioni, collegare i dati disponibili sulla materia con quelli relativi a R: questa è la "dinamica cosmologica," della quale diremo qualcosa in seguito. Per ora limitiamoci alla cinematica, studiando come l'andamento del parametro di scala nel tempo influisce sulla propagazione della luce.

---

(1) I dati degli ultimi anni riescono compatibili col caso euclideo ($k = 0$). Ci sono però diverse ragioni per non abbandonare la discussione del modello sferico: una è che capire un modello euclideo in espansione non è più semplice (per quanto possa apparire strano); poi c'è il vantaggio che il modello sferico si appoggia alla geometria familiare della sfera; infine un modello sferico con R molto grande non differisce apprezzabilmente da un modello euclideo (e del resto, i dati di osservazione sono sempre affetti da incertezze).

Il redshift cosmologico

I messaggi che noi possiamo ricevere dal resto dell'Universo sono quasi esclusivamente luce, oppure onde elettromagnetiche di altre lunghezze d'onda: quindi capire come si propaga la luce in un universo a curvatura costante in espansione è decisivo. Più in particolare, a noi interessa risolvere il seguente problema, chiaramente connesso col redshift cosmologico di cui abbiamo parlato: se una sorgente lontana emette luce di una certa lunghezza d'onda, che noi riceviamo dopo un certo tempo, con quale lunghezza d'onda la riceviamo?

Sebbene possa sembrare un problema complicato, in realtà la soluzione è semplice, se si ragiona al modo giusto (succede spesso ...). Consideriamo due stazioni, una E che emette la luce, e una R che la riceve (fig. 16–4); la luce viaggia da E a R. In figura è rappresentata a sinistra la situazione all'istante di emissione, a destra quella all'istante di arrivo. L'unica differenza è che il raggio dell'Universo è cambiato nel frattempo.

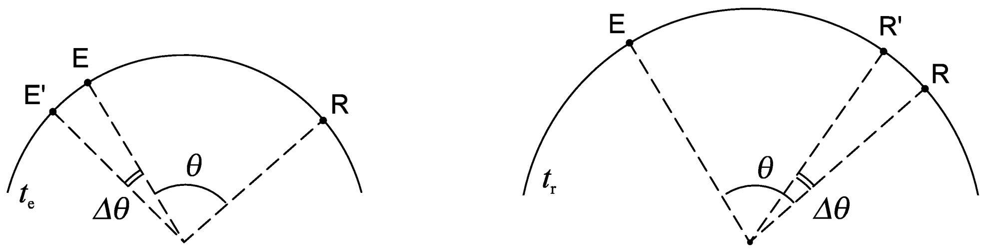

fig. 16–4

Attenzione: non bisogna farsi confondere dalla figura, dove sembra che la luce segua una linea curva sulla sfera: questo contraddice forse il fatto che la luce viaggia in linea retta? Il punto è che *la superficie della sfera è tutto il nostro universo*: quindi la "linea retta" diviene l'arco di cerchio massimo sulla superficie della sfera, cioè la geodetica. Il vero problema è che mentre la luce cammina, l'Universo gli si espande sotto, per così dire. La luce impiega un certo tempo ad andare da E a R: se è partita a un istante t_e, a cui il raggio dell'Universo era R_e, quando arriva in R, all'istante t_r, il raggio sarà diventato $R_\mathrm{r} > R_\mathrm{e}$. Come si fa allora a sapere quanto tempo impiega la luce, e che cosa succede nella propagazione?

Quello che segue è il ragionamento che si trova in tutti i libri di cosmologia, e che viene di solito fatto con una matematica piuttosto sofisticata; tuttavia è possibile presentarlo in termini del tutto elementari, e senza nessuna alterazione nella sostanza fisica del discorso. Chiamiamo ϑ l'angolo al centro corrispondente all'arco ER (ricordate: ϑ è una coordinata comovente). La distanza fra E ed R all'istante t_e sarà $R_\mathrm{e}\vartheta$, mentre la distanza all'istante t_r sarà invece $R_\mathrm{r}\vartheta$, che è maggiore.

Prendiamo ora accanto a E, ma dalla parte opposta a R, un altro punto, separato da E di un piccolo angolo $\Delta\vartheta$, e chiamiamolo E$'$; prendiamo poi un altro punto prima di R — chiamiamolo R$'$— anch'esso separato da R di $\Delta\vartheta$. Supponiamo che le due sorgenti in E e in E$'$ facciano entrambe partire due lampi di luce allo stesso istante t_e: è chiaro che quando il lampo emesso da E arriva in R, quello emesso da E$'$ arriva in R$'$. Infatti anche se l'Universo si va espandendo, la propagazione della luce tra E$'$ ed R$'$ segue le stesse modalità di quella tra E ed R, perché lo spazio è a curvatura costante.

Ma il lampo emesso da E$'$ deve passare per E: ci arriverà a un istante che chiamo $t_\mathrm{e} + \Delta t_\mathrm{e}$. Dopo essere arrivato in R$'$, arriverà anche in R, a un istante $t_\mathrm{r} + \Delta t_\mathrm{r}$. Se l'angolo $\Delta\vartheta$ è piccolo, anche Δt_e e Δt_r sono piccoli; e si potrà scrivere

$$\Delta t_\mathrm{e} = R_\mathrm{e}\,\Delta\vartheta/c \qquad \Delta t_\mathrm{r} = R_\mathrm{r}\,\Delta\vartheta/c$$

perché nel tempo Δt_e il raggio non cambia apprezzabilmente, e lo stesso nel tempo Δt_r. Abbiamo anche tenuto presente che la luce si sta propagando nel vuoto, e abbiamo continuato ad assumere come fatto fondamentale che — anche in uno spazio curvo, in presenza della gravità, ecc. — la luce viaggia sempre alla velocità c in un rif. localmente inerziale (PE).

A questo punto possiamo dimenticare E′ ed R′, che sono serviti solo come espediente per arrivare al risultato. In pratica abbiamo questa situazione: un lampo di luce parte da E all'istante t_e e arriva in R all'istante t_r; poco dopo da E parte un altro lampo — all'istante $t_\mathrm{e} + \Delta t_\mathrm{e}$ — che arriva in R all'istante $t_\mathrm{r} + \Delta t_\mathrm{r}$. Abbiamo visto che Δt_r non è uguale a Δt_e: se fate partire dalla galassia E due lampi, intervallati di un secondo, quando arrivano alla galassia R il loro intervallo non è più di un secondo. Sarà maggiore, perché $R_\mathrm{r} > R_\mathrm{e}$, ossia perché l'Universo si espande.

È importante a questo punto ricordare il significato delle nostre t: si tratta in ogni punto (in ogni galassia) del tempo *proprio* segnato da un orologio locale; tutti gli orologi sono sincronizzati, come abbiamo visto, grazie al PC.

Credo che ormai sia chiaro dove andiamo a parare. Se invece di due lampi di luce abbiamo un'unica sorgente monocromatica, allora quei Δt_e e Δt_r li possiamo interpretare come i periodi della radiazione alla trasmissione e alla ricezione. Ma i periodi sono proporzionali alle lunghezze d'onda: abbiamo così trovato che *la lunghezza d'onda ricevuta sta alla lunghezza d'onda emessa come il raggio dell'Universo all'istante di arrivo sta al raggio all'istante di partenza*:

$$\frac{\lambda_\mathrm{r}}{\lambda_\mathrm{e}} = \frac{R_\mathrm{r}}{R_\mathrm{e}}\,. \tag{16–1}$$

Redshift ed espansione

Se colleghiamo questa relazione alla definizione (15–5) del parametro di redshift, troviamo

$$1 + z = \frac{R_\mathrm{r}}{R_\mathrm{e}}\,. \tag{16–2}$$

Abbiamo così ottenuta un'interpretazione del redshift molto più profonda che non l'effetto Doppler: l'osservazione del redshift cosmologico è la prova che il raggio dell'Universo è cresciuto dal momento in cui la luce è stata emessa al momento in cui la riceviamo. Così un redshift di 0.3 (del 30%) significa che il raggio dell'Universo è aumentato del 30% nel tempo che la luce ha impiegato ad arrivare fino a noi.

Notate che nel nostro ragionamento, e quindi nella formula (16–2), non c'è affatto l'ipotesi che z debba essere piccolo. Se noi conosciamo una sorgente per la quale $z = 4$, questo ci dice che il rapporto tra il raggio dell'Universo oggi e il raggio quando la luce è stata emessa da quella sorgente è $1 + 4$, cioè 5. Quando la luce è partita, il raggio di curvatura dell'Universo era 5 volte più piccolo dell'attuale.

Viceversa non possiamo dir niente del tempo al quale la luce è stata emessa, a meno che non conosciamo la funzione $R(t)$. Se per esempio accadesse che $R \propto t^{2/3}$ e quindi $t \propto R^{3/2}$ potremmo dire che $t_\mathrm{r}/t_\mathrm{e} = 5^{3/2} \simeq 11$.

Un'osservazione conclusiva: abbiamo mostrato che non è indispensabile ricorrere all'effetto Doppler per spiegare il redshift cosmologico; inoltre la strada che abbiamo seguita è più immediata, e a mio parere è molto più istruttiva, per la diretta connessione che ha con la geometria dello spazio-tempo e con la sua evoluzione temporale.

La legge di Hubble come approssimazione

Il passo successivo è di capire come la legge di Hubble sia una conseguenza *approssimata* della relazione (16–2). Supponiamo che le galassie che stiamo osservando siano abbastanza vicine. "Vicine" va inteso naturalmente su scala cosmologica: una distanza piccola rispetto al raggio dell'Universo. Non è quindi necessario limitarsi a pochi milioni di anni luce: anche centinaia di milioni vanno ancora bene.

Per le galassie vicine z è piccolo: infatti nel tempo che la luce impiega ad arrivare, il raggio dell'Universo cambia di poco. Per calcolare $t_\mathrm{r} - t_\mathrm{e}$ possiamo addirittura supporre il raggio costante: allora potremo scrivere

$$t_\mathrm{r} - t_\mathrm{e} = \frac{d}{c}\,.$$

Infatti, se la distanza d nel frattempo non è cambiata, basta dividerla per la velocità della luce. Inoltre possiamo porre, approssimativamente:

$$R_\mathrm{r} = R_\mathrm{e} + \frac{dR}{dt}\,(t_\mathrm{r} - t_\mathrm{e}) = R_\mathrm{e} + \dot{R}\,\frac{d}{c}\,.$$

Dividendo per R_e:

$$\frac{R_\mathrm{r}}{R_\mathrm{e}} - 1 = \frac{\dot{R}}{R}\,\frac{d}{c}$$

(siccome R_e e R_r sono poco diversi, a secondo membro scrivo R, senza stare a distinguere tra raggio all'emissione e raggio alla ricezione). Ma dalla (16–2)

$$\frac{R_\mathrm{r}}{R_\mathrm{e}} - 1 = z$$

e quindi abbiamo:

$$z = \frac{\dot{R}}{c\,R}\,d$$

cioè la legge di Hubble, dove il coefficiente di proporzionalità, ossia la costante di Hubble, è

$$H = \frac{\dot{R}}{R} \tag{16–3}$$

(ricordate che $z = v/c$ e $v = Hd$).

Riassumendo: abbiamo fatto un modello di universo a curvatura costante, supponendo poi che il raggio di curvatura vari nel tempo; ma non abbiamo fatto alcuna ipotesi sulla funzione $R(t)$. Abbiamo trovato che per piccole distanze deve valere la legge di Hubble, cioè che il redshift è proporzionale alla distanza, e che la costante di Hubble è legata alla legge di espansione dalla formula (16–3).

Significato cosmologico di H; il problema dell'estrapolazione

A questo punto, mettendo nella formula il valore osservato di H, se ne ricava il valore di $\dot{R}/R$. Si ha così un'interpretazione cinematica di H: è il rapporto tra la velocità di espansione dell'Universo e il raggio in quel momento. Supponiamo ora — non è affatto vero, ci serve solo per orientamento — che la velocità di espansione sia costante: allora $R/\dot{R}$ (detto "tempo di Hubble" t_H) è il tempo trascorso dall'istante in cui il raggio era nullo. Poiché t_H è l'inverso di H, vale $15 \cdot 10^9$ anni: quindi nell'ipotesi che la velocità di espansione rimanga costante, scopriamo che 15 miliardi di anni fa l'Universo aveva raggio nullo. Però non bisogna farsi impressionare da questo risultato, perché è basato su di un'ipotesi sicuramente non vera.

Possiamo dare un'interpretazione grafica del nostro ragionamento. Disegniamo un ipotetico grafico della funzione $R(t)$ (di cui per ora non sappiamo niente) (fig. 16–5, curva a tratto intero). All'istante attuale t_0 abbiamo un raggio R_0: se tiriamo la tangente alla curva in questo punto, il segmento $t_1 t_0$ sull'asse dei tempi (quello che una volta veniva chiamata "sottotangente" della curva) è lungo t_H: all'ingrosso 15 miliardi di anni.

Naturalmente questo non vuol dire molto, perché la curva, anziché come l'ho disegnata, potrebbe essere fatta diversamente, per es. come quella tratteggiata. Il punto d'intersezione della tangente con l'asse dei tempi non ha, per ora, nessun particolare significato: la curva $R(t)$ potrebbe intersecare l'asse in un punto qualunque, o anche non intersecarlo affatto. Occorrerebbe sapere qualcosa di più sulla $R(t)$.

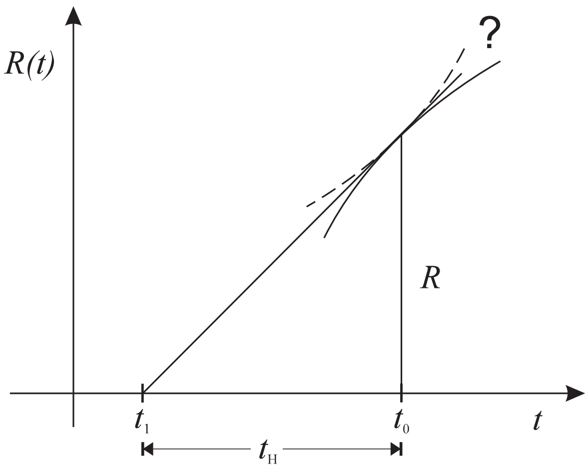

fig. 16–5

Torniamo un momento sul fatto che la legge di Hubble è solo approssimata, e cerchiamo di spingere oltre questa approssimazione: potremmo cercare di migliorarla facendo uno sviluppo al secondo ordine. Anche senza fare il calcolo esplicito, è chiaro che per distanze abbastanza grandi il parametro di redshift non sarà più rigorosamente proporzionale alla distanza. Il suo andamento esatto dipenderà da quello della funzione $R(t)$: non conterà più solo la tangente, ma anche la curvatura del grafico. Se quindi noi potessimo fare misure di redshift a grandi distanze, ne ricaveremmo ulteriori informazioni su com'è fatto il grafico: per esempio se è concavo o convesso. Sapere se è concavo o convesso è molto importante, perché se avessimo delle buone ragioni per dire che è sempre concavo verso il basso, allora avremmo un'intersezione con l'asse dei tempi — cioè un raggio nullo — a un istante più vicino a noi di t_{H}. Purtroppo già il valore della costante di Hubble è incerto; a maggior ragione è difficile studiare le deviazioni dalla legge di Hubble a grandi distanze.

Due obiezioni

Quando si parla di espansione e redshift, è frequente sentirsi fare due obiezioni. La prima è questa: se tutte le distanze si espandono, la stessa cosa succede agli strumenti di misura; allora com'è possibile rivelare l'espansione?

In effetti, se noi avessimo un Universo riempito di materia formata di particelle puntiformi, slegate le une dalle altre, l'obiezione sarebbe giusta: tutte le particelle si allontanerebbero nella stessa proporzione, e mancherebbe qualsiasi termine di confronto per accorgersi dell'espansione. Ma il mondo non è fatto così.

Già le galassie non si espandono: le stelle che le compongono risentono del campo gravitazionale (ossia della modifica alla geometria dello spazio-tempo) prodotta dalla massa della galassia, che localmente ha una densità molto maggiore di quella media dell'Universo. Allo stesso modo i pianeti del sistema solare si muovono nel campo del Sole, e il fatto che il sistema sia immerso in una geometria in lenta espansione non ha effetto sulle loro orbite.

Ma se poi scendiamo di scala, per arrivare alla Terra, o alla materia che costituisce un metro campione, entrano in gioco altre interazioni: le dimensioni della Terra o le distanze fra gli atomi del metro sono determinate dalle interazioni elettriche fra le cariche atomiche, che sono enormemente più grandi degli effetti gravitazionali. Quindi né la Terra né il metro si accorgono se l'Universo si espande o no.

Una seconda obiezione concerne invece la velocità dell'espansione. Se la funzione $R(t)$ è del tipo di quelle che ho accennato nel corso della lezione o nel problema n. 4, ossia se R cresce come una potenza di t con esponente minore di 1, è chiaro che $\dot{R} \to \infty$ quando $t \to 0$. Anche la distanza fra due punti A e B qualsiasi del fluido cosmologico, che vale $R\vartheta$, si comporta allo stesso modo: la sua derivata va a infinito per $t \to 0$. Ma questo non è in contrasto con l'esistenza di una velocità limite?

Per rispondere, occorre ricordare il significato dei rif. localmente inerziali e del PE. In un rif. localmente inerziale vale la RR, che prevede appunto una velocità limite; ma sappiamo che quello di rif. localmente inerziale è anch'esso un concetto limite, nel senso che ha validità approssimata, tanto migliore quanto più piccola è la regione di spazio e di tempo che si considera. Invece il calcolo di una velocità maggiore di c indicato sopra fa uso di due corpi a distanza *finita*, e richiede di spingersi a condizioni in cui la curvatura dello spazio-tempo non può essere trascurata.

Insomma: non esiste un rif. inerziale *esterno*, rispetto al quale studiare il moto di A e di B. Chi propone l'obiezione in realtà non ha abbandonato l'idea che sussista, nascosto per così dire dietro lo spazio-tempo di cui abbiamo ragionato in questa lezione, il buon vecchio spazio euclideo, così tranquillizzante...

Problemi

1. Dimostrare la formula per l'area della sfera di "raggio" a in una S^3.

2. Lo spazio iperbolico può essere definito come la sottovarietà di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + R^2 = w^2$ $(w > 0)$, la distanza essendo definita in $\mathbb{R}^4$ da

$$s^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - (w_1 - w_2)^2. \qquad (16\text{–}4)$$

Studiare le proprietà di questo spazio. In particolare:

a) lo spazio è finito o infinito?

b) che relazione c'è fra "raggio" e area di una sfera?

(Suggerimento: molto può essere capito limitandosi al piano $y = z = 0$.)

3. Si consideri un ipotetico universo in cui $R = a\sqrt{t}$.

a) Quale sarà la relazione redshift-distanza?

b) Calcolare la costante di Hubble H e il tempo di Hubble t_H.

(Suggerimento: usare $c\,dt = ds = R\,d\vartheta$ per ricavare ϑ.)

4. Nell'universo del problema precedente è stato osservato un oggetto con $z = 4$. Assumendo $H = 70\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ calcolare:

a) la distanza attuale dell'oggetto

b) la variazione di tale distanza nel tempo

c) la distanza all'istante di emissione $t = t_\mathrm{e}$

d) la variazione nel tempo di tale distanza.

Risposte

Problema 1. (Area della sfera in S^3):

Il modo più semplice di risolvere il problema è di considerare S^3 come una sottovarietà di $\mathbb{R}^4$, di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2.$$

In S^3 si possono allora definire coordinate polari χ, ϑ, φ, con le relazioni

$$\begin{aligned} x &= R\,\sin\chi\,\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ y &= R\,\sin\chi\,\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ z &= R\,\sin\chi\,\cos\vartheta \\ w &= R\,\cos\chi \end{aligned} \qquad (16\text{–}5)$$

Una sfera S^2 con centro O in $\chi = 0$ è definita fissando un valore di χ e lasciando libere le coordinate ϑ, φ: il suo raggio (in $\mathbb{R}^4$) è $R \sin\chi$ e l'area sarà perciò

$$A = 4\pi R^2 \sin^2\chi. \tag{16–6}$$

Il raggio a non è che la distanza dal centro O a un punto P della sfera, per es. quello con $\vartheta = \varphi = 0$. La distanza va però calcolata su S^3: più esattamente sull'arco di geodetica che unisce O con P. I punti di questa geodetica hanno tutti $\vartheta = \varphi = 0$ (per simmetria); quindi le (16–5) forniscono

$$dx = dy = 0 \qquad dz = R \cos\chi\, d\chi \qquad dw = R \sin\chi\, d\chi.$$

Ne segue

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 = R^2\, d\chi^2 \quad \Rightarrow \quad ds = R\, d\chi$$

e quindi $a = R\chi$.

Basta ora sostituire $\chi = a/R$ nell'espressione (16–6) dell'area, per arrivare al risultato voluto:

$$A = 4\pi R^2 \sin^2(a/R).$$

Problema 2. (Lo spazio iperbolico):

a) Seguiamo il suggerimento, ossia consideriamo la sezione $y = z = 0$ di $\mathbb{R}^4$, che ci fornirà una sezione *unidimensionale* dello spazio che dobbiamo studiare. Allora

$$x^2 + R^2 = w^2. \tag{16–7}$$

La (16–7) è un'iperbole equilatera nel piano (x, w); la condizione $w > 0$ ci restringe al ramo superiore. Gli asintoti sono le bisettrici degli assi.

La formula (16–4) della distanza, scritta in forma differenziale, è

$$ds^2 = dx^2 - dw^2 \tag{16–8}$$

(le altre due coordinate sono costanti).

La distanza dal punto $O(0, R)$ a un punto $P(x, w)$ si può calcolare come segue. Differenziando la (16–7) ed eliminando dw nella (16–8) troviamo

$$ds = \frac{R}{w}\, dx = \frac{R\, dx}{\sqrt{R^2 + x^2}}. \tag{16–9}$$

Integrando:

$$s = \int_0^x \frac{R\, dx'}{\sqrt{R^2 + x'^2}} = R \ln\left(\frac{x}{R} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2}}\right).$$

In realtà i calcoli si semplificano molto introducendo al posto di x la coordinata χ tale che $x = R \sinh\chi$. Infatti ne segue $w = R \cosh\chi$ e sostituendo in (16–9) si vede che $ds = R\, d\chi$; quindi la distanza cercata è proprio $s = R\,\chi$.

Quando $x \to \infty$ anche $\chi \to \infty$, il che basta a dimostrare che lo spazio è infinito nel senso delle distanze.

b) Da quanto abbiamo trovato finora, segue in modo naturale l'idea d'introdurre, al posto di x, y, z, w, delle coordinate polari al modo seguente:

$$\begin{aligned} x &= R\,\sinh\chi\,\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ y &= R\,\sinh\chi\,\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ z &= R\,\sinh\chi\,\cos\vartheta \\ w &= R\,\cosh\chi. \end{aligned} \tag{16–9}$$

Si verifica subito che $x^2 + y^2 + z^2 + R^2 = w^2$ e ovviamente $w > 0$. Già sappiamo che $R\,\chi$ è il raggio della sfera S^2 di centro O, e le (16–9) mostrano che l'area vale

$$A = 4\pi R^2 \sinh^2\chi.$$

Problema 3. (Relazione redshift-distanza):
a) Secondo il suggerimento:

$$c\,dt = ds = R\,d\vartheta = a\sqrt{t}\,d\vartheta.$$

Separando le variabili e integrando si trova

$$\vartheta = \frac{2c}{a}\left(\sqrt{t_\mathrm{r}} - \sqrt{t_\mathrm{e}}\right) = \frac{2c}{a^2}\,(R_\mathrm{r} - R_\mathrm{e}). \tag{16–10}$$

La distanza l_r alla ricezione è

$$\begin{aligned} l_\mathrm{r} = R_\mathrm{r}\vartheta &= \frac{2c}{a^2}\,R_\mathrm{r}(R_\mathrm{r} - R_\mathrm{e}) = \frac{2c}{a^2}\,R_\mathrm{r}^2\left(1 - \frac{R_\mathrm{e}}{R_\mathrm{r}}\right) \\ &= \frac{2c}{a^2}\,R_\mathrm{r}^2\left(1 - \frac{1}{1+z}\right) = \frac{2c}{a^2}\,R_\mathrm{r}^2\,\frac{z}{1+z} = D\,\frac{z}{1+z}. \end{aligned} \tag{16–11}$$

dove

$$D = \frac{2c}{a^2}\,R_\mathrm{r}^2 = 2c\,t_\mathrm{r}.$$

Da qui si ricava

$$z = \frac{l_\mathrm{r}}{D - l_\mathrm{r}}. \tag{16–12}$$

Si vede che $z \to \infty$ per $l_\mathrm{r} \to D$, ossia la distanza D definisce un *orizzonte*. Questo appare anche dalla (16–10): per $R_\mathrm{e} = 0$, ϑ assume il valore finito D/R_r.

Si può obiettare che l'orizzonte non esiste se $D/R_\mathrm{r} > \pi$, dato che $\vartheta = \pi$ all'antipodo. Questo è vero; però sostituendo l'espressione di D si vede che in realtà l'orizzonte esiste se $R_\mathrm{r} < \pi a^2/2c$, cioè quando il raggio dell'Universo è abbastanza piccolo.

Il risultato è molto interessante, anche perché si riproduce con qualsiasi modello realistico di Universo, in cui R cresce sempre come una potenza di t con esponente minore di 1. Ne segue che nelle prime fasi dell'espansione regioni distanti dell'Universo non si possono vedere, quindi non possono interagire: come mai allora la radiazione di fondo è isotropa? È questo uno dei motivi che hanno portato a proporre i "modelli inflazionari," in cui si postula la presenza di un qualche campo con proprietà (densità, pressione) diverse dalla materia ordinaria, sì che l'espansione iniziale segue una legge diversa.

b) La legge di Hubble si ricava dalla(16–12), per $l_\mathrm{r} \ll D$:

$$z \simeq \frac{l_\mathrm{r}}{D} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{c}{D} = \frac{1}{2\,t_\mathrm{r}}. \tag{16–13}$$

Da qui anche il tempo di Hubble:

$$t_\mathrm{H} = 2\,t_\mathrm{r}.$$

Siamo dunque nel caso $t_\mathrm{r} < t_\mathrm{H}$: proprio quello accennato nella fig. 16–5.

Problema 4. (Distanza e velocità di un oggetto con alto redshift):
a) Conviene anzitutto calcolare D definito dalla relazione con H (16–13):

$$D = \frac{c}{H} = 4.3\,\mathrm{Gpc}.$$

Poi dalla (16–11) si ha $l_\mathrm{r} = 3.4\,\mathrm{Gpc}$.

b) È ovvio che si deve calcolare la derivata di l_r rispetto a t_r; il punto delicato è: che cosa va tenuto costante quando si deriva? La sola grandezza che resta costante durante l'espansione è la coordinata comovente ϑ della sorgente: partiamo dunque da $l_\mathrm{r} = R_\mathrm{r}\,\vartheta$ e deriviamo, ricordando anche che $R = a\,\sqrt{t}$:

$$\frac{dl_\mathrm{r}}{dt_\mathrm{r}} = \frac{dR_\mathrm{r}}{dt_\mathrm{r}}\,\vartheta = \frac{a}{2\sqrt{t_\mathrm{r}}}\,\vartheta = \frac{a}{2\sqrt{t_\mathrm{r}}}\,\frac{l_\mathrm{r}}{a\,\sqrt{t_\mathrm{r}}} = \frac{l_\mathrm{r}}{2t_\mathrm{r}} = H\,l_\mathrm{r}.$$

Mettendo i numeri:

$$\frac{dl_\mathrm{r}}{dt_\mathrm{r}} = 2.4 \cdot 10^5\,\mathrm{km/s}.$$

c) La distanza all'emissione si calcola facilmente, dato che tutte le distanze variano come R. Quindi

$$l_\mathrm{e} = l_\mathrm{r}\,\frac{R_\mathrm{e}}{R_\mathrm{r}} = \frac{l_\mathrm{r}}{1+z} = 0.68\,\mathrm{Gpc}.$$

d) Il calcolo si fa come in *b*):

$$\frac{dl_\mathrm{e}}{dt_\mathrm{e}} = \frac{l_\mathrm{e}}{2t_\mathrm{e}}.$$

Sappiamo già che $l_\mathrm{e} = l_\mathrm{r}/(1+z)$; quanto a t_e:

$$t_\mathrm{e} = \frac{R_\mathrm{e}^2}{a^2} = \frac{R_\mathrm{r}^2}{a^2(1+z)^2} = \frac{t_\mathrm{r}}{(1+z)^2}$$

e perciò

$$\frac{dl_\mathrm{e}}{dt_\mathrm{e}} = \frac{l_\mathrm{r}}{2t_\mathrm{r}}\,(1+z) = H\,l_\mathrm{r}\,(1+z).$$

Il risultato numerico è $1.2 \cdot 10^6\,\mathrm{km/s}$, ossia $4c$, e questo era lo scopo della domanda!

Non c'è niente di paradossale nell'aver trovato un valore superiore a c, perché $d \leq /dt_\mathrm{e}$ *non può essere interpretata come velocità della sorgente rispetto al ricevitore*. Infatti questa interpretazione richiederebbe di poter definire un RI che si estenda spazialmente in modo da includere i due oggetti, e ciò è precluso dalla curvatura dello spazio-tempo.