

# La simmetria in fisica\*

*Elio Fabri*

## 1. Simmetria nel linguaggio comune e nel linguaggio scientifico

### *Simmetria nel linguaggio comune*

L'aggettivo “simmetrico” viene usato in due modi e con due significati diversi:

- un oggetto è *simmetrico* (fig. 1)
- un oggetto è *il simmetrico* di un altro (fig. 2).



Fig. 1: Un oggetto simmetrico.

Osserviamo la differenza logica: nel primo caso si tratta di una *proprietà* (predicato), nel secondo di una *relazione*. In entrambi i casi è sottinteso qualcosa: la *trasformazione di simmetria*, che per noi sarà la cosa fondamentale.

Negli esempi fatti si tratta di *simmetria speculare*, cioè *rispetto a un piano*, detta anche *riflessione*: è la trasformazione che manda ogni punto dello spazio nel suo “simmetrico” rispetto a quel piano.

---

\* Lezione e gruppo di lavoro alla Scuola AIF di Storia della Fisica, Piacenza 20–2–2013. Pubbl. nel *Quaderno 25, LFnS 47*, suppl. al n. 1 (2014), p. 5.



Fig. 2: I guanti di un paio sono uno il simmetrico dell'altro.

Introducendo opportune coordinate, la possiamo scrivere

$$\begin{aligned}x &\rightarrow x \\y &\rightarrow y \\z &\rightarrow -z.\end{aligned}$$

## 2. Simmetria e invarianza

È utile anche considerare la negazione della proprietà: un guanto (ma anche un orologio, una chiave ...) *non* è simmetrico (fig. 3). Ciò vuol dire che la trasformazione di simmetria è definita *in astratto* (come detto sopra) e quel particolare oggetto *non* è *invariante* rispetto a quella simmetria.



Fig. 3: Esempi di oggetti non simmetrici.

La distinzione tra *simmetria* e *invarianza* sarà fondamentale in ciò che segue:

- “simmetria” è una *trasformazione* (dei punti dello spazio) definita in astratto
- “invarianza” (o no) è una *proprietà* (di un corpo, di una legge fisica) rispetto a quella trasformazione.

Controllare l'invarianza di un corpo (più astrattamente, di una figura) rispetto a una certa simmetria è facile: si trasformano tutti i punti della figura con la data simmetria, e si verifica se la figura rimane la stessa (invariata).

### 3. Invarianza di una legge fisica

L'invarianza di una legge fisica è un concetto più delicato, ma per noi assai più importante. Vediamolo su un esempio concreto e fondamentale per suo conto: l'invarianza per *rotazioni*.

Che cosa intendiamo dicendo ad es. che *le leggi della fisica sono invarianti per rotazioni*?

Immaginiamo un esperimento qualsiasi, realizzato in un certo laboratorio. Pensiamo poi a un secondo laboratorio, del tutto uguale al primo, salvo che tutte le parti (oggetti, strumenti...) sono *ruotati* di un certo angolo intorno a un certo asse, rispetto a quelli del primo. In questo secondo laboratorio ripetiamo l'esperimento.

Se accade che i risultati del secondo esperimento e il suo andamento nel tempo coincidono con quelli del primo (a parte la rotazione) diremo che questo esperimento e le leggi fisiche coinvolte sono *invarianti* per quella rotazione.

Se l'invarianza sussiste per *qualsiasi asse* e per *qualsiasi angolo*, diremo semplicemente che l'esperimento (e le leggi fisiche coinvolte) sono *invarianti per rotazioni*.

Costruire il secondo esperimento può non essere sempre banale: se per es. nell'esperimento è importante la gravità, abbiamo due alternative:

- o ci limitiamo a rotazioni che lascino invariato il campo gravitazionale (rotazioni attorno alla verticale)
- oppure ruotiamo anche il campo ... ma come si fa?

In realtà la cosa è semplice: basta che il secondo esperimento sia costruito in un laboratorio situato *in un punto diverso* della Terra, distante dal primo.

Se invece è importante il campo magnetico, dovremmo ruotare le sorgenti del campo, incluso quello terrestre... In questo caso la soluzione più semplice sarà di schermare il campo magnetico terrestre (cosa che non sarebbe stata possibile col campo gravitazionale).

Se si passa ad altre simmetrie possono sorgere delle complicazioni nuove. Quando si tratta di rotazioni, è chiaro che cosa significa "ruotare l'esperimento": tutte le forze, le velocità, i campi, debbono essere ruotati allo stesso modo (in quanto *vettori*). Ma con le riflessioni capita qualcosa di inatteso ... ne riparleremo più oltre.

#### 4. Il principio del taccuino

Riprendiamo in esame i due laboratori di cui sopra, nei quali tutti gli oggetti (strumenti, apparati di misura . . .) differiscono solo per essere stati trasformati mediante una data operazione di simmetria (per es. una rotazione, ma non necessariamente).

Due fisici, A e B, eseguono un esperimento, ciascuno nel suo laboratorio, e registrano i risultati su un “taccuino” (che ai tempi nostri sarà un computer). Se accidentalmente i due taccuini vengono scambiati, e se A e B *non sono in grado di accorgersi dello scambio*, vuol dire che l’esperimento (e le leggi fisiche coinvolte) sono *invarianti* rispetto a quella simmetria.

#### 5. Esempi di simmetrie

Anche fuori dei laboratori ci sono simmetrie diverse da quella speculare. Per es. molti fiori hanno diversi tipi di simmetria (più esattamente: sono invarianti rispetto a diverse simmetrie): figg. 4a, 4b, 4c, 4d.

In particolare si notano le *rotazioni discrete*, di sottomultipli dell’angolo giro: binaria, ternaria, ecc. In quasi tutti gli esempi ci sono in realtà combinazioni di rotazioni e di riflessioni.

Meno presenti nel linguaggio comune sono le *simmetrie continue*, di cui l’esempio più semplice sono le *rotazioni attorno a un asse*, di angolo arbitrario. Un cilindro (circolare retto) è un facile esempio di figura invariante per tutte queste simmetrie: si parla perciò di *simmetria cilindrica*. (Ci sarebbero anche le riflessioni, ma non vengono di solito considerate nella simmetria cilindrica.)

È più complesso l’insieme delle simmetrie che lasciano invariante una sfera (*simmetria sferica*): si tratta dell’insieme di *tutte le rotazioni* di asse arbitrario per il centro e angolo pure arbitrario (anche qui tralasciamo le riflessioni). Più complesso, tra l’altro, perché due rotazioni generiche *non commutano tra loro* (v. dopo).

Tutte le simmetrie di cui ho parlato si possono scrivere come *trasformazioni delle coordinate di un punto*.

*Attenzione*: trasformazione delle coordinate *di un punto che va in un altro punto*, non *cambiamento del sistema di coordinate*.

È abituale chiamare questo “punto di vista attivo,” mentre il cambiamento del sistema di coordinate (o meglio del riferimento) viene detto “punto di vista passivo.”

Le trasformazioni che stiamo considerando, e che ci serviranno nel seguito, si possono rappresentare con *matrici*, perché in termini di coordinate cartesiane sono lineari (omogenee). Questo è molto importante nell’applicazione alla meccanica quantistica, ma noi oggi non ne faremo uso.



Fig. 4a: *Ophrys apifera* (vesparia); un solo piano di simmetria.



Fig. 4b: *Vinca minor* (pervinca); nessun piano, un asse quinario.



Fig. 4c: *Helleborus niger* (rosa di Natale); un asse quinario e 5 piani.



Fig. 4d: *Lilium alba* (giglio di S. Antonio); un asse ternario e tre piani.

## 6. La struttura di gruppo delle simmetrie

Tutte le classi di simmetrie che abbiamo considerato, e le altre possibili, hanno una struttura in comune, che in linguaggio matematico si chiama *struttura di gruppo*. Ricordiamo di che si tratta.

1) Se  $S_1, S_2$  sono due particolari simmetrie, è definita la loro *composizione*, che consiste semplicemente nell'applicarle una dopo l'altra, ottenendo una nuova simmetria:

$$S_3 = S_2 \circ S_1.$$

*Attenzione:* in generale l'ordine conta: qui s'intende che prima si applica  $S_1$ , poi  $S_2$ ;  $S_2 \circ S_1$  non coincide necessariamente con  $S_1 \circ S_2$ .

In altri termini: non è richiesto (e non accade in generale) che la legge di composizione sia *commutativa*. Per es. le rotazioni attorno ad assi diversi *non commutano*.

2) La composizione è *associativa*:

$$S_1 \circ (S_2 \circ S_3) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3.$$

3) Esiste la particolare simmetria, detta *identità* I, con la proprietà

$$(\forall S): I \circ S = S \circ I = S.$$

(Come trasformazione geometrica, I consiste nel mandare ogni punto in se stesso.)

4) Se S è una qualsiasi simmetria, è definita la sua *inversa* S', tale che

$$S \circ S' = S' \circ S = I.$$

Non va dimenticato che la struttura di gruppo può essere definita in modo *astratto*, senza pensare alle trasformazioni di simmetria: gli elementi di un gruppo astratto sono *privi d'interpretazione*; il gruppo è un insieme caratterizzato solo dall'averne una *legge di composizione* con le proprietà dette.

Non avremo occasione di servirci di questo punto di vista, ma in applicazioni più sofisticate delle nostre non può essere trascurato.

## 7. Il “gruppo d’invarianza” di una figura o di una legge ...

Introduciamo ora un concetto fondamentale, che era già apparso “di straforo”: la definizione di un particolare gruppo di simmetrie come quello formato da *tutte le simmetrie che lasciano invariante* una figura data. Lo si chiama perciò *gruppo d'invarianza* (ma non di rado si dice “gruppo di simmetria”) di quella figura.

Analogamente si parlerà di gruppo d’invarianza di una legge fisica, o di un insieme di leggi (la meccanica, le interazioni deboli ...).

### *Esempi*

a) Un oggetto *simmetrico* ha come gruppo d’invarianza la *simmetria speculare*.

Questo è il più semplice gruppo (non banale) possibile, formato solo dalla riflessione R e dall'identità I. Ovviamente  $R \circ R = I$ . Non pochi fiori hanno solo questa invarianza: per es. le Orchidacee (fig. 4a), le Fabacee (leguminose, fig. 5a), le Labiate (fig. 5b), le Plantaginacee (fig. 5c), le Violacee (fig. 5d).



Fig. 5a: *Lathyrus pratensis* (cicerchia dei prati).



Fig. 5b: *Salvia pratensis* (salvia dei prati).



Fig. 5c: *Veronica filiformis* (veronica filiforme).



Fig. 5d: *Viola biflora* (violetta a due fiori).

*b)* Il gruppo d'invarianza del giglio (fig. 4d) è alquanto più complesso: consiste di 6 elementi, tre rotazioni e tre riflessioni. A seconda del contesto viene chiamato  $C_{3v}$  o  $S_3$ .  $C_{3v}$  è la notazione detta di Schönflies, in uso per i cristalli;  $S_3$  è il *gruppo simmetrico* su tre elementi, ossia il gruppo delle permutazioni. Come mostra la fig. 6, i due gruppi sono *isomorfi*, ossia astrattamente *sono lo stesso gruppo*.

*c)* Il gruppo d'invarianza della sfera è un gruppo *continuo*, con infiniti elementi; più tecnicamente un *gruppo di Lie*. Se non si considerano le riflessioni, è di solito indicato con  $SO(3)$ . Come gruppo di matrici, consiste di tutte le matrici  $3 \times 3$ , ortogonali, a determinante 1. Ha importanza centrale in meccanica quantistica.



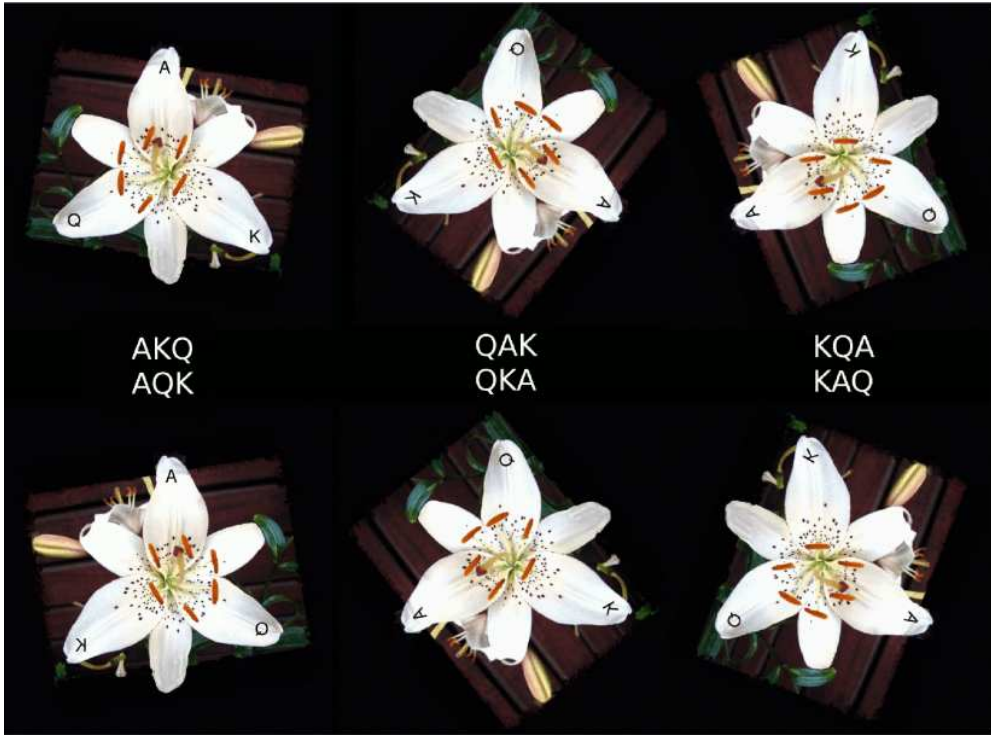


Fig. 6: Isomorfismo fra il gruppo di simmetria del giglio  $C_{3v}$  e il gruppo delle permutazioni di tre lettere  $S_3$ . Leggendo in ogni figura le lettere sui petali del giglio, iniziando dall'alto e in senso orario, si ottengono le 6 permutazioni di AKQ.

## 8. Rottura di una simmetria

Esaminiamo un esempio molto semplice: un quadrato e il suo gruppo d'invarianza. Esso consiste delle rotazioni di  $90^\circ$  e multipli, e poi delle riflessioni (nel piano) rispetto alle mediane e alle diagonali: in tutto 8 elementi (fig. 7). Nella notazione di Schönflies viene indicato con  $C_{4v}$ .

Se ora deformiamo il quadrato in un rettangolo, alcune invarianze scompaiono:

- le rotazioni di  $90^\circ$  (resta quella di  $180^\circ$ )
- le riflessioni sulle diagonali (restano quelle sulle mediane).

Il gruppo si riduce a 4 elementi:  $C_{2v}$  (fig. 8).

Siamo quindi passati da un certo gruppo ( $C_{4v}$ ) a un suo *sottogruppo* ( $C_{2v}$ ). Usando il linguaggio fisico, dica-

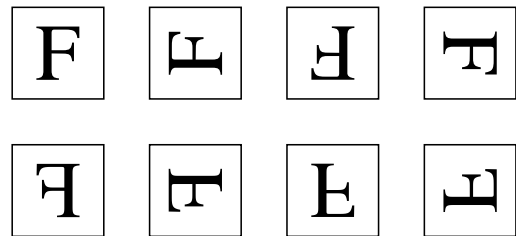
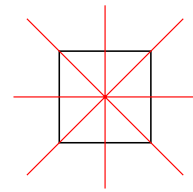


Fig. 7: Il gruppo di simmetria  $C_{4v}$  di un quadrato. La lettera F è presente solo per evidenziare le 8 trasformazioni applicate.



mo che c'è stata una *rottura di simmetria*.

Il fenomeno si presenta in molti casi importanti. Due esempi:

1) Un atomo (un certo insieme di suoi stati) può essere invariante per rotazioni (gruppo  $SO(3)$ ). Applicando un campo magnetico l'invarianza si rompe, e sopravvive solo quella rispetto alle rotazioni attorno alla direzione del campo (gruppo  $SO(2)$ ). (Ho tralasciato per semplicità le riflessioni.)

Questo ha per effetto la *rottura della degenerazione*: gli stati che prima avevano la stessa energia ora si separano (effetto Zeeman).

2) Lo stesso atomo, che isolato ha invarianza  $SO(3)$ , se fa parte di un cristallo ha un gruppo d'invarianza molto più ristretto (finito). Fisicamente ciò è dovuto alle interazioni con gli altri atomi del cristallo. Anche in questo caso si ha una rottura della degenerazione.

Sempre in materia di rottura di una simmetria, un tema importante sarebbero le “rotture spontanee.” Ma si tratta di un argomento assai più avanzato, che qui non è possibile neppure accennare.

## 9. Invarianza in fisica: esempi semplici

### *Esempio 1.*

Un grave cade partendo dalla quiete: la sua traiettoria è verticale “per ragioni di simmetria.” Cerchiamo di spiegare rigorosamente che cosa c'è sotto questo modo di dire.

A volte si dà una spiegazione di questo tipo: “non c'è alcuna ragione perché vada verso destra piuttosto che verso sinistra.” Vero ma insoddisfacente: che vuol dire “non c'è alcuna ragione?” Che ragione stiamo cercando?

Ecco i passi logicamente necessari.

1. Le leggi della meccanica sono *invarianti per rotazioni*.
2. Il moto è (univocamente) determinato dalla *legge di forza* e dalle *condizioni iniziali* (posizione e velocità). Questo è il *determinismo* della meccanica classica.
3. La legge di forza è semplice: campo gravitazionale *uniforme*, ossia forza ovunque verticale e d'intensità costante. (Fra poco vedremo che le ipotesi necessarie sulla legge di forza sono più deboli.)
4. Condizioni iniziali: posizione qualsiasi, *velocità nulla*. (Anche la condizione sulla velocità si può indebolire.)

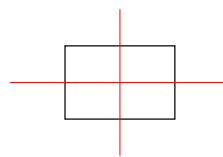


Fig. 8: La deformazione del quadrato riduce il suo gruppo di simmetria a un *sottogruppo*.

5. Tanto la legge di forza come le condizioni iniziali sono *invarianti* per rotazioni attorno alla verticale per il punto di partenza.

6. Deduzione: quindi anche la traiettoria *deve essere invariante*.

#### Dimostrazione

Applicando una rotazione al nostro esperimento (A), otteniamo un *nuovo esperimento* (B) (fig. 9). Nell'esperimento B le condizioni iniziali e la legge di forza sono *le stesse* che in A.

Pertanto (determinismo) anche la traiettoria sarà la stessa. L'unica traiettoria che resta invariata per la rotazione che abbiamo applicato, è una che segue la verticale per il punto di partenza. ■

Il punto centrale dell'argomento è il *determinismo*: ci sono dati e condizioni del sistema che ne determinano completamente stato ed evoluzione. Tutti gli esempi che seguiranno si basano sulla stessa linea di ragionamento.

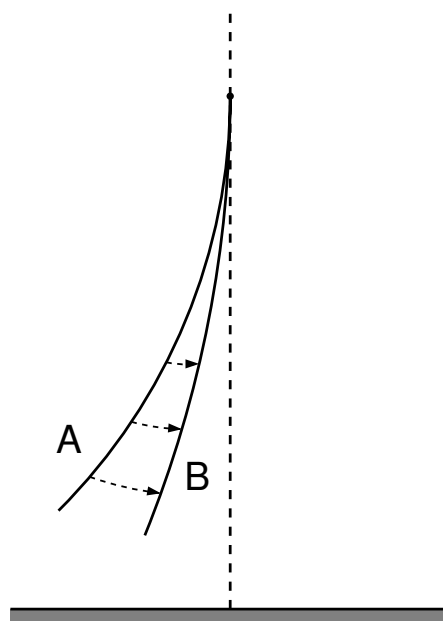


Fig. 9: L'unica traiettoria invariante per rotazioni attorno alla verticale per il punto di partenza è quella verticale.

“Non c'è alcuna ragione” significa appunto che i dati bastano a determinare il moto, e perciò una trasformazione di simmetria che lasci invariati i dati lascerà invariato il moto.

Come si potevano indebolire le ipotesi? È chiaro: ciò che basta è che *legge di forza e condizioni iniziali* siano invarianti. Per es. il campo gravitazionale potrebbe essere quello di un corpo a simmetria sferica. La velocità iniziale può anche non essere nulla, purché resti *diretta come l'asse di simmetria*.

#### Esempio 2.

L'orbita di un pianeta è una curva piana.

#### Dimostrazione

Campo gravitazionale e condizioni iniziali restano invarianti per *riflessione* rispetto al piano che passa per il centro del Sole e contiene *posizione e velocità* iniziali del pianeta (fig. 10). Quindi deve restare invariata anche la traiettoria.

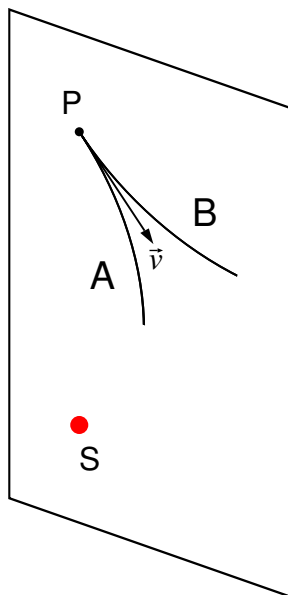


Fig. 10: Solo le curve che stanno nel piano di simmetria sono invarianti per riflessioni.

Solo le curve appartenenti al piano di simmetria hanno questa proprietà. ■

## 10. Invarianza in fisica: esempi meno semplici

*Esempio 3.*

Il campo elettrico di un conduttore sferico:

- a) è radiale
- b) la sua intensità dipende solo da  $r$ .

La dimostrazione si basa su un'assunzione generale:

*Le leggi dell'elettromagnetismo (in particolare, l'elettrostatica) sono invarianti per rotazioni.*

*Lemma:* La distribuzione di carica su un conduttore sferico è *uniforme*.

*Dimostrazione:* Ci basiamo su una legge dell'elettrostatica:

*La distribuzione di carica all'equilibrio su un sistema di conduttori è univocamente determinata, data la geometria dei conduttori e le cariche totali su ciascuno di essi.*

Consideriamo due punti distinti, P e Q, sulla superficie del conduttore. Una rotazione che mandi P in Q lascia invariata la geometria e la carica totale: pertanto deve anche lasciare invariante la distribuzione di carica. Ne segue che la densità superficiale di carica in Q è la stessa che in P. ■

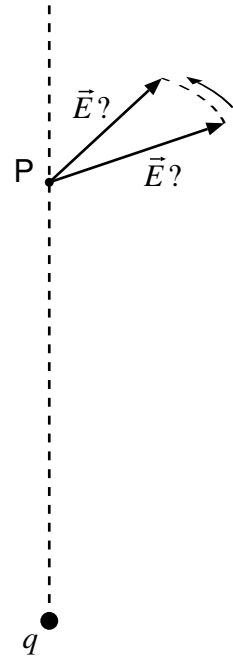


Fig. 11: Solo un campo radiale è invariante per rotazioni.

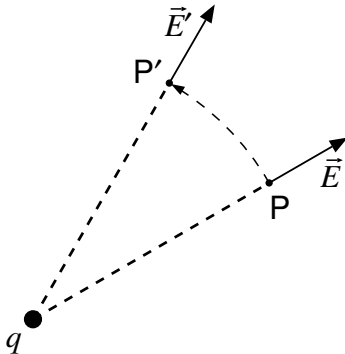


Fig. 12: Una rotazione che mandi P in P' lascia invariante la distribuzione di carica, quindi anche il campo. Perciò l'intensità del campo in P' coincide con quella del campo in P.

Con un'opportuna rotazione avente asse passante per il centro della carica, possiamo mandare P in un punto qualsiasi P' alla stessa distanza (fig. 12).

Questa rotazione lascia *invariante* la distribuzione di carica (che è uniforme, per il Lemma); pertanto anche *il campo* prodotto è invariante (principio del taccuino). In particolare, l'intensità del campo è la stessa in P e in P'. ■

Useremo poi una seconda legge dell'elettrostatica:

*Il campo elettrico prodotto da un corpo carico dipende solo dalla distribuzione di carica sul corpo.*

*Dimostrazione di a).*

Consideriamo una rotazione attorno alla retta che passa per il centro del conduttore e per il punto P (fig. 11). La distribuzione di carica è *invariante*; pertanto deve anche essere invariante *il campo* prodotto in P.

Solo un vettore diretto come l'asse di rotazione è invariante. ■

*Dimostrazione di b).*

### Commento

Abbiamo visto come con sole considerazioni di simmetria, senza bisogno di conoscere la legge di Coulomb, il teorema di Gauss, ecc. si possa dire molto sul campo elettrico prodotto da un conduttore sferico; in particolare, che l'intensità del campo dipende solo da  $r$ .

Una cosa però non possiamo dire: quale sia l'esatta dipendenza da  $r$ . Sappiamo che è  $1/r^2$ , ma finché si ragiona solo sulla simmetria  $1/r^3$  o qualsiasi altra funzione di  $r$  andrebbe altrettanto bene.

Questo esempio (come anche gli altri che seguono) mostra bene la potenza e insieme i limiti degli argomenti di simmetria.

#### Esempio 4.

Il campo elettrico di un filo carico infinito:

- a) è radiale
- b) la sua intensità dipende solo da  $r$ .

*Osservazione preliminare.* In questo caso l'invarianza per rotazioni *non è sufficiente*: occorre introdurre anche l'invarianza *per traslazioni*.

Anche qui faremo uso di un'assunzione generale:

*Le leggi dell'elettromagnetismo (in particolare, l'elettrostatica) sono invarianti per traslazioni.*

*Lemma:* La distribuzione di carica su un filo infinito è *uniforme*.

*Dimostrazione:* Consideriamo due punti distinti del filo, P e Q. Una traslazione che mandi P in Q lascia invariata la geometria e la carica totale: pertanto deve anche lasciare invariata la distribuzione di carica. Ne segue che la densità lineare di carica in Q è la stessa che in P. ■

*Dimostrazione di a).*

Una rotazione di  $180^\circ$  attorno alla retta per P perpendicolare al filo (fig. 13) lascia invariata la distribuzione di carica, quindi anche il campo.

Solo un vettore radiale è lasciato invariato dalla rotazione. ■

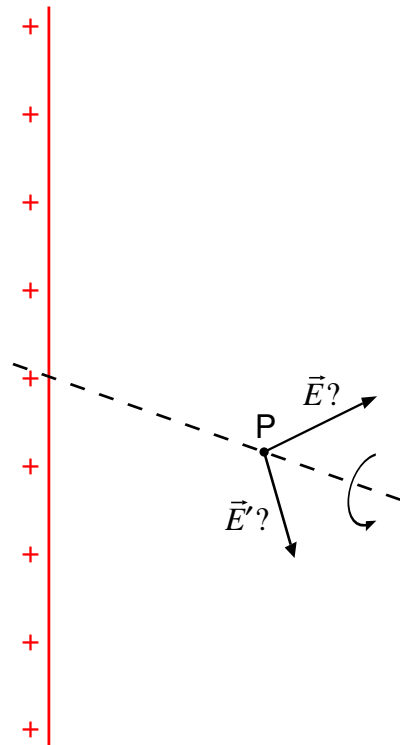


Fig. 13: Una rotazione di  $180^\circ$  attorno alla retta tratteggiata lascia invariata la distribuzione di carica, quindi deve anche lasciare invariato il campo in P. Ne segue che il campo è radiale.

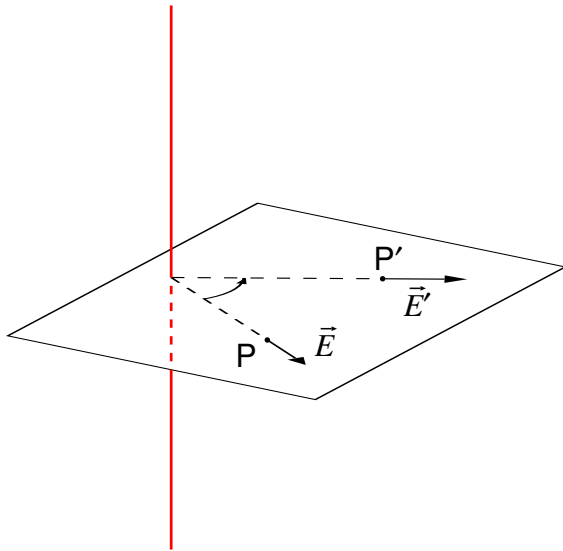


Fig. 14: Con un'opportuna rotazione attorno al filo possiamo mandare  $P$  in  $P'$ . La distribuzione di carica è invariante per questa rotazione, quindi lo è anche il campo.

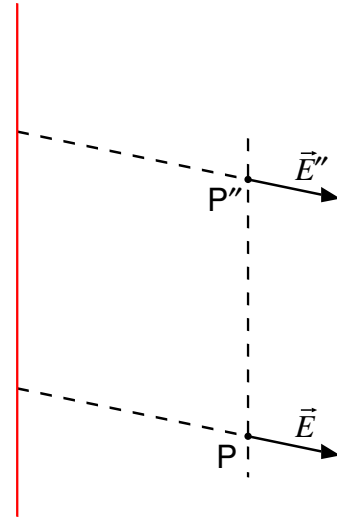


Fig. 15: Con una traslazione parallela al filo possiamo mandare  $P$  in  $P''$ . Dato che la distribuzione di carica resta invariata, dovrà essere invariante anche il campo.

*Dimostrazione di b).*

*b1)* Per due punti  $P$  e  $P'$  a uguale distanza dal filo e sullo stesso piano ortogonale al filo (fig. 14).

Una rotazione attorno al filo che mandi  $P$  in  $P'$  lascia invariata la distribuzione di carica. Quindi il campo in  $P$  va nel campo in  $P'$  ed è dimostrato che l'intensità è la stessa. ■

*b2)* Per due punti  $P$  e  $P''$  situati su una parallela al filo (fig. 15).

Qui occorre usare l'invarianza *per traslazioni*. Consideriamo una traslazione parallela al filo, che mandi  $P$  in  $P''$ : di nuovo resta invariata la distribuzione di carica, e quindi il campo in  $P$  va nel campo in  $P''$ , con la stessa intensità. ■

*b3)* Per due punti  $P$  e  $Q$  alla stessa distanza dal filo ma in posizioni generiche (fig. 16), basta comporre rotazione e traslazione. La tesi segue allora da *b1)*, *b2)*. ■

*Esercizio:* Che cosa cambia se il filo ha lunghezza finita? Si lascia la soluzione al lettore.

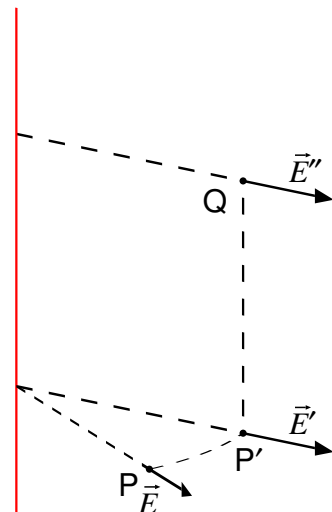


Fig. 16: I due punti  $P$  e  $Q$  sono alla stessa distanza dal filo, ma in posizione generica. Si può passare da  $P$  a  $Q$  componendo una rotazione attorno al filo e una traslazione parallela ad esso.

Suggerimenti:

- Che cosa si può dire ora della distribuzione di carica? Per quali simmetrie è invariante? (Sono un sottogruppo del caso di filo infinito ...)
- In quali punti si può dire che il campo è radiale?
- In quali punti ha la stessa intensità, ma non se ne può determinare completamente la direzione?
- In quali punti il campo ha la direzione del filo?
- Che cosa si può dire in generale della direzione del campo?

## 11. Invarianza in fisica: un nuovo problema (il campo magnetico)

Esempio 5.

Il campo magnetico di un filo infinito percorso da corrente:

- ha linee di campo circolari in piani perpendicolari al filo e con centro sul filo
- la sua intensità dipende solo da  $r$ .

Dimostrazione (fallita) di a).

L'unica simmetria che sembra utilizzabile è una rotazione di  $180^\circ$  attorno alla perpendicolare al filo. Prima difficoltà: per tale rotazione la corrente *non è invariante*, ma s'inverte. Possiamo cavarcela aggiungendo un'altra legge:

*invertendo la corrente s'inverte anche il campo magnetico.*

Dunque la nostra rotazione deve *invertire* il campo. Esso quindi starà nel piano per P parallelo al filo e perpendicolare alla normale per P al filo. Ma la direzione di  $\vec{B}$  nel piano *resta indeterminata* (fig. 17).

Gli argomenti basati sulle rotazioni attorno al filo e sulle traslazioni parallele al filo restano validi, ma *non ci dicono la direzione del campo* in P. Servono solo a collegare direzione e intensità in due punti distinti P e Q, a uguale distanza dal filo.

*Che fare?*

Si potrà forse ricorrere a un altro tipo d'invarianza? Viene in mente quella per *riflessioni*, che non abbiamo dovuto usare per il campo elettrico. Vediamo...

Proviamo con una riflessione in un piano che passa per il filo: questa riflessione lascia invariato il filo e la corrente, quindi deve anche lasciare invariato

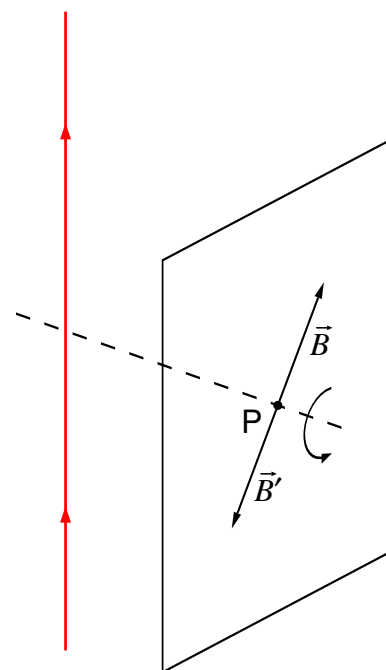


Fig. 17: Una rotazione di  $180^\circ$  attorno alla perpendicolare al filo inverte la corrente, quindi deve anche invertire il campo.

il campo. Si otterrebbe così che  $\vec{B}$  deve essere *parallelo* al filo, il che è *sbagliato* (fig. 18).

(Fine della dimostrazione fallita.)

*Che cosa c'è sotto?*

Se siamo abbastanza smaliziati, sappiamo che tutto dipende dal fatto che per riflessioni  $\vec{B}$  *non si trasforma come un vettore*, ma come uno *pseudovettore* (vettore assiale). Ma c'è un modo elementare per arrivarci?

Occorre aggiungere qualche altra informazione, per es. la legge della *forza di Lorentz*. Non ci si deve meravigliare che occorran altre informazioni per decidere il comportamento di  $\vec{B}$  per riflessioni: questo infatti *non è determinato a priori*, ma solo in base a fatti sperimentali. Dopotutto, la stessa cosa vale per il campo elettrico: lo trattiamo come vettore (polare) perché lo abbiamo definito come forza per unità di carica, e conosciamo dalla meccanica il comportamento delle forze.

Prendiamo dunque una carica che si muove in un campo magnetico uniforme, con velocità perpendicolare al campo: sappiamo com'è diretta la forza di Lorentz.

Consideriamo la riflessione in un piano passante per la carica, parallelo a  $\vec{B}$  e contenente  $\vec{v}$ . Con questa riflessione  $\vec{v}$  resta invariata e  $\vec{F}$  s'inverte: dunque *si deve anche invertire  $\vec{B}$*  (fig. 19).

Consideriamo ora la riflessione in un piano ortogonale a  $\vec{B}$ : sia  $\vec{v}$  che  $\vec{F}$  restano invariate, quindi deve restare *invariato* anche  $\vec{B}$  (fig. 20).

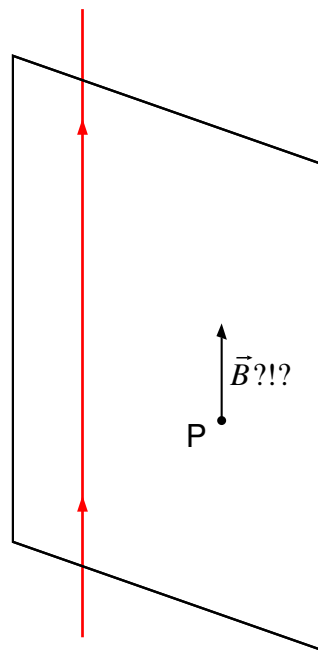


Fig. 18: Filo e corrente sono invariati per la riflessione rispetto al piano che contiene P e il filo. Dunque anche  $\vec{B}$  deve essere invariante?

## 12. Riflettiamo

Che cosa impariamo da questo esempio? L'insegnamento si può riassumere come segue:

- 1) Non ci sono simmetrie e leggi di trasformazione *definite a priori*.
- 2) Siamo liberi di definire una simmetria *come più ci piace*, e la definizione deve includere la legge di trasformazione di *tutte* le grandezze fisiche rilevanti.
- 3) Però tra queste infinite simmetrie, solo alcune ci forniscono *invarianze* di alcune (o tutte) le leggi fisiche: questo può dircelo solo l'esperimento. Ovviamente, le simmetrie che portano a invarianze sono *utili* e per questo vengono privilegiate.



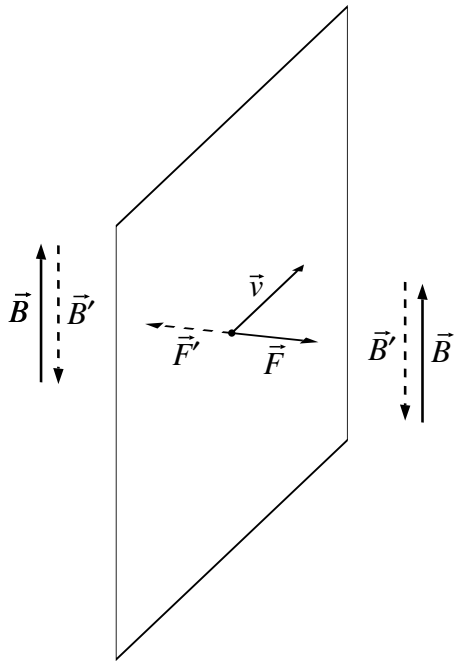


Fig. 19: Dalla legge della forza di Lorentz possiamo dedurre il comportamento di  $\vec{B}$  per riflessione rispetto a un piano parallelo al campo: con questa riflessione  $\vec{B}$  s'inverte.

4) Ma sarebbe un errore trasformare questo fatto in un'asserzione *ontologica*, del tipo "il campo magnetico è un pseudovettore (anche se lo si dice spesso, per brevità). L'asserzione corretta è:

*Se definiamo la simmetria per riflessioni facendo trasformare il campo magnetico come un pseudovettore, l'esperienza ci mostra che le leggi dell'e.m. risultano invarianti per questa simmetria.*

Capito questo, possiamo riprendere daccapo il ragionamento. La riflessione in un piano passante per il filo deve *lasciare invariato*  $\vec{B}$  perché la corrente non cambia. Ma ciò accade solo se  $\vec{B}$  è *perpendicolare* al piano.

Possiamo poi usare le rotazioni con asse il filo e le traslazioni parallele al filo, come abbiamo fatto col campo elettrico, per completare la dimostrazione di a) e per dimostrare b).

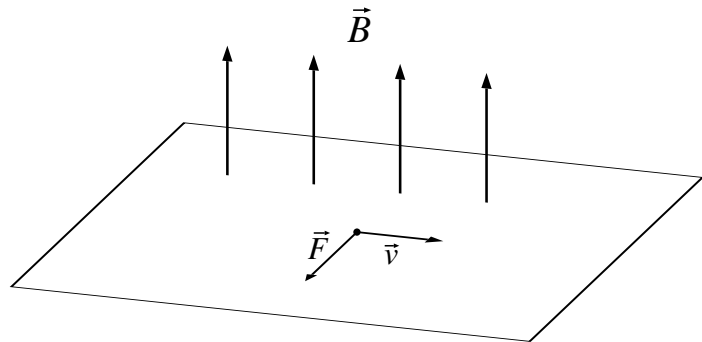


Fig. 20: In modo del tutto analogo, si vede che nella riflessione rispetto a un piano perpendicolare al campo  $\vec{B}$  rimane invariato.

## **Bibliografia – Collegamenti**

1. Una presentazione divulgativa sulla simmetria:

<http://www.df.unipi.it/~fabri/sagredo/varie/simmetria1-short.pdf>

2. Approfondimenti didattici sulla simmetria in matematica:

<http://www.df.unipi.it/~fabri/sagredo/varie/simmetria2-short.pdf>

3. Lezioni su gruppi e simmetrie in fisica:

<http://www.df.unipi.it/~fabri/sagredo/gruppi>