

La meccanica quantistica spiega il mondo: il caso dei solidi

Elio Fabri

Riassunto

Iniziamo con un veloce sguardo ai fatti e ai fenomeni relativi ai solidi, noti all'inizio del secolo scorso. Segue un resoconto delle spiegazioni disponibili all'epoca e dei problemi aperti. Si mostra poi come la meccanica quantistica abbia rivoluzionato questa parte della fisica: le prime spiegazioni fanno uso solo dell'esistenza di livelli atomici discreti; poco dopo, la statistica di Fermi–Dirac per gli elettroni nei metalli fornisce un nuovo strumento esplicativo e risolve gravi difficoltà.

L'introduzione della m.q. cambia radicalmente il quadro: le spiegazioni precedenti acquistano un diverso significato e in certi casi vengono rese più aderenti ai fatti; altri fenomeni che avevano resistito fino a quel punto, trovano finalmente una spiegazione soddisfacente. In pochi anni (1925–31) si assiste a uno sviluppo esplosivo delle conoscenze teoriche in materia di fisica dei solidi (e non solo).

Nella parte finale parliamo brevemente dell'enigma delle nane bianche. Si tratta di un argomento che non appartiene alla fisica dei solidi, ma vi è strettamente connesso: sia perché si ha sempre a che fare con materia altamente condensata, sia perché la soluzione data in quegli anni (Fowler, Chandrasekhar) si basa ancora sulla teoria del gas di Fermi altamente degenere.

Motivazione

Troppo spesso, nell'insegnamento secondario della “fisica moderna,” a proposito della meccanica quantistica l'equilibrio è spostato verso gli aspetti filosofici. Ne segue per la m.q. l'immagine di una fisica non solo anti-intuitiva, ma affetta da *limiti intrinseci* (indeterminismo) e inquinata da *gravi complicazioni* (l'influenza dell'osservatore).

In realtà la m.q. è *tutt'altro*: dalla sua nascita, quasi un secolo fa, ha permesso la comprensione di una quantità di *fenomeni già noti*, che sono stati inquadrati in uno schema teorico unitario. Ha permesso la *previsione* di fenomeni *non ancora osservati* e poi verificati; ha dato luogo a uno *sviluppo tecnologico* esplosivo e non ancora concluso...

Lo scopo di questo intervento è di fornire esempi e prove di quanto appena detto, in un ambito particolare: appunto la fisica dello stato solido (quasi esclusivamente).

Stato dei fenomeni noti prima della m.q.

Intorno alla fine dell'800 esistevano una quantità di fenomeni e di leggi empiriche, alcune note da molto tempo, in attesa di spiegazione teorica soddisfacente.

- a) Problema generale: che cosa tiene insieme i solidi? (metalli, cristalli ionici, cristalli covalenti ...).
- b) Calori specifici: la *legge di Dulong e Petit* (1819) dice che la capacità termica per mole (calore molare) è *la stessa* per tutti i cristalli *elementari* (chimicamente costituiti da elementi). La legge di D-P può anche essere generalizzata ad altri tipi di cristalli, non elementari.

Erano però note delle eccezioni: solidi con calore molare parecchio più piccolo (Be, C, ...). In seguito si scoprì che C_{mol} *dipende da T* e che quello di D-P è un *limite ad alta temperatura*.

- c) Conduttori metallici e semiconduttori: la distinzione sta
 - nel valore della resistività, per vari ordini di grandezza maggiore per i semiconduttori
 - nella diversa dipendenza della resistività dalla temperatura: aumenta con T nei metalli, diminuisce nei semiconduttori.

Non era neppure chiaro sperimentalmente se esistesse davvero un tipo di solido semiconduttore, o se invece quel comportamento fosse dovuto a effetti di superficie.

- d) La conduzione termica dei metalli e la sua relazione con la conduzione elettrica. La legge di Wiedemann e Franz (1853) dice:

il rapporto tra la conducibilità termica σ_{th} e quella elettrica σ_{el} è circa lo stesso per diversi metalli.

Nel 1872 Ludwig Lorenz (non confondere con Hendrik Lorentz) dimostra che $\sigma_{\text{th}}/\sigma_{\text{el}}$ è proporzionale a T .

- e) Effetto termoionico (Guthrie 1873, Edison 1880) (ancora non si conoscevano gli elettroni).
- f) L'effetto Hall (1879, prima della scoperta dell'elettrone) e sue anomalie (grande per Bi, segno "sbagliato" per Be Fe Co Zn Cd Pb).

- g) Proprietà ottiche: soprattutto l'esistenza di solidi trasparenti (nel visibile) e altri totalmente opachi.

Era nota la concordanza almeno parziale con la distinzione tra conduttori e isolanti: isolante = trasparente, conduttore = opaco.

- h) Proprietà magnetiche. Già nell'800 sono note le tre categorie: *diamagnetismo* (1778, il nome è dovuto a Faraday, 1845), *paramagnetismo*, *ferromagnetismo*.

È nota sperimentalmente la transizione ferro-/para- (Curie 1895); la suscettività paramagnetica è inversamente proporzionale a T .

Tralascio per brevità molti altri effetti: *termoelettrico* (Seebeck 1821), *termoelettrico inverso* (Peltier 1834); *magnetoresistivo* (Kelvin 1851)... Soprattutto non parlerò della *superconduttività* (Kamerlingh Onnes 1911), perché la sua spiegazione sarebbe arrivata molto dopo, negli anni '50 del secolo scorso.

Spiegazioni prima della m.q.

a) Legami atomici nei solidi

Non c'erano spiegazioni per le forze che tengono insieme i cristalli. In alcuni casi (es. cristalli ionici) si poteva pensare a forze elettriche, ma in altri occorreva postulare altri tipi di forze (sconosciute). Particolarmente oscuro il caso dei cristalli covalenti (es. diamante) dove i legami sono assai intensi.

b) La legge di Dulong–Petit

La legge rientra bene nella teoria statistica di Maxwell–Boltzmann: basta assumere che i singoli atomi siano tenuti da un legame elastico. L'energia media per grado di libertà è kT (metà cinetica, metà potenziale) e la legge di D–P segue immediatamente:

$$C_{\text{mol}} = 3R. \quad (1)$$

Non c'era però alcuna spiegazione per le eccezioni (problema comune, del resto, ad altri calori specifici, anche nei gas). Né per la variazione dei calori specifici con la temperatura.

c) Il modello di Drude

Questo modello (elettroni liberi, 1900) spiega l'aumento della resistività con la temperatura nei metalli, in senso qualitativo. Però non dà alcuna spiegazione sull'esistenza dei semiconduttori e sul comportamento “inverso” della loro resistività in funzione di T .

d) La legge di Wiedemann–Franz

Sempre Drude spiega anche la legge di W–F, e trova un buon accordo per i valori numerici. Però le dipendenze da T di σ_{th} e σ_{el} sono sbagliate: la teoria dà $\sigma_{\text{el}} \propto T^{-1/2}$ e $\sigma_{\text{th}} \propto T^{1/2}$, mentre sperimentalmente $\sigma_{\text{el}} \propto T$ e σ_{th} non dipende da T .

La teoria più raffinata di Lorentz (1905) porta alle stesse dipendenze, ma dà un coefficiente più piccolo per un fattore 2/3 nella legge di W–F, dove Drude darebbe un risultato più vicino ai dati sperimentali.

e) L'effetto termoionico

Il modello a elettroni liberi porta alla legge di Richardson (1901):

$$I \propto \sqrt{T} \exp\left(\frac{-eV_{\text{ext}}}{kT}\right). \quad (2)$$

È difficile decidere dagli esperimenti se il fattore che moltiplica l'esponentiale abbia l'esponente 1/2, o uno diverso.

f) *L'effetto Hall*

Il modello a elettroni liberi permette una teoria dell'effetto Hall come dovuto alla forza di Lorentz sui portatori di carica (fig. 1).

La legge empirica è

$$\frac{E_y}{j_x B_z} = \text{cost.} = R_H \quad (3)$$

e il valore della costante che risulta dalla teoria è $R_H = 1/(nq)$ dove q è la carica del singolo portatore e n la loro densità numerica. Se i portatori sono elettroni, $q = -e$ e la costante di Hall *deve essere negativa*.

Assumendo *un elettrone libero per atomo* si ottengono valori non lontani da quelli misurati per i metalli del primo gruppo. Restano inspiegati i valori positivi di R_H per alcuni metalli del secondo gruppo (Be, Zn, Cd) e per metalli di transizione (Fe, Co, ma non Ni). Così pure non ha spiegazione il valore assai maggiore (per 4 ordini di grandezza) del bismuto.

g) *Le proprietà ottiche*

I due fatti, che i metalli sono buoni conduttori e al tempo stesso assorbono la luce e sono riflettenti in superficie, si spiegano insieme col modello a elettroni liberi.

Il modello spiega anche l'esistenza di una frequenza critica, al disopra della quale il metallo diventa trasparente. Per i metalli alcalini (dove la frequenza critica è nell'ultravioletto) l'accordo fra teoria e misure è abbastanza buono. Però altri metalli (Cu, Au ...) appaiono colorati perché assorbono già nel visibile; il che non si spiega col modello a elettroni liberi.

Il caso dei dielettrici trasparenti nel visibile si spiega assumendo che gli elettroni siano legati, e quindi capaci di assorbire solo a determinate frequenze (situate nell'ultravioletto). Tuttavia l'assorbimento UV non mostra uno spettro di righe (come nei gas) ma un *continuo* al disopra della soglia, e questo è più difficile da giustificare.

Per i cristalli ionici, un modello di vibrazioni elastiche con diversi modi normali riesce a rendere conto della presenza di un assorbimento infrarosso accanto a quello ultravioletto.

Tutti questi modelli però non riescono a render conto del comportamento complicato di molti spettri di assorbimento, e della loro grande varietà.

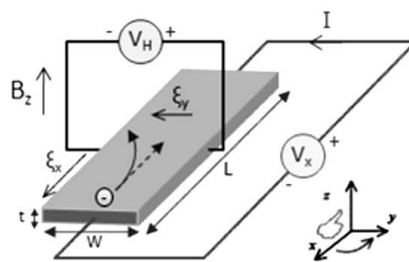


Fig. 1: L'effetto Hall

h) *Le proprietà magnetiche*

Seguendo una prima idea di Weber (1850-70), Langevin (1905) fa la teoria del dia- e para-magnetismo. La teoria di Langevin fornisce un accordo ragionevole per il diamagnetismo di solidi non metallici, e un accordo qualitativo per diversi sali paramagnetici. Però...

Bohr (1911) e van Leeuwen (1919) dimostrano un teorema: *in una teoria classica non possono esistere effetti magnetici*. Dunque qualsiasi “teoria” classica di magnetismo, paramagnetismo, ferromagnetismo è intrinsecamente sbagliata. Questo è detto esplicitamente in alcuni libri: per es. Becker [1], Feynman [2] e Kittel [3] (2^a edizione; nell’8^a il riferimento è stato soppresso); ma nessuna spiegazione viene data di come la teoria di Langevin possa funzionare.

i) *Il problema del calore specifico*

Esisteva poi un *grave problema*: in un modello a elettroni liberi anche questi dovrebbero contribuire al calore specifico, che per un metallo monovalente dovrebbe essere maggiore per un fattore 3/2 di quello dato dalla legge di D-P.

Infatti per ogni atomo del metallo c’è un contributo all’energia interna pari a $\frac{3}{2}kT$ di energia cinetica di vibrazione dello ione, e altrettanto di energia potenziale. Questi due contributi danno un’energia $3RT$ per mole, da cui la legge di D-P. Ma c’è ancora un contributo $\frac{3}{2}kT$ dall’energia cinetica dell’elettrone di conduzione, che aumenta l’energia interna totale per un fattore 3/2, come detto.

Le spiegazioni quantistiche

Si possono distinguere tre livelli di spiegazione, a seconda che:

- A) richiedano solo l’esistenza di livelli discreti.
- B) facciano uso della meccanica statistica quantistica (Fermi-Dirac, 1926) per gli elettroni.
- C) richiedano la vera e propria meccanica quantistica (equazione di Schrödinger, 1926).

A: *I calori specifici*

Einstein per primo (1906) assume che la quantizzazione dei livelli per multipli di $h\nu$ non valga solo nell’emissione e assorbimento di radiazione, ma sia una caratteristica generale:

Se i sistemi elementari, di cui abbiamo supposto la presenza nello scambio di energia che avviene tra radiazione e materia, non possono essere concepiti secondo l’attuale teoria cinetico-molecolare, non siamo forse costretti a modificare la teoria per gli altri sistemi a oscillazioni periodiche che vengono implicati dalla teoria molecolare del calore? Mi sembra che non ci possano essere dubbi sulla risposta da dare. Se la teoria della radiazione di Planck centra il nocciolo del problema, possiamo aspettarci di riscontrare, in altri campi della teoria atomica,

contraddizioni tra l'attuale teoria cinetico-molecolare e i dati sperimentali, contraddizioni che possono essere eliminate con l'indirizzo che abbiamo imboccato.

Il modello di Einstein è grossolano, perché assume un'unica frequenza di vibrazione. Tuttavia spiega perché i calori specifici vanno a zero con T , anche se l'andamento è *troppo rapido*: come $\exp(-a/T)$. Si vede che la legge di D-P è asintotica ad alta T , e lo scostamento avviene a una temperatura dipendente dalla frequenza di vibrazione: kT dell'ordine di $h\nu$.

Il modello di Born-von Kármán (1912) considera invece i modi normali di vibrazione:

La formula di Einstein sarebbe perfettamente giustificata se si potessero derivare le frequenze infrarosse dalle oscillazioni proprie di una molecola isolata. Non c'è dubbio d'altra parte che l'ipotesi delle oscillazioni elastiche del reticolo spaziale sia più vicina alla realtà.

Otengono un buon accordo a basse temperature.

Anche Debye (1912) fa la stessa critica ad Einstein (del resto Einstein aveva riconosciuto nel 1911 che l'uso di una sola frequenza era troppo semplicistico). Segue però una strada diversa:

... esiste invece una strada notevolmente più diretta per giungere a una formula razionale per i calori specifici. Tale metodo è molto analogo a quello utilizzato da Jeans per provare la formula dell'irraggiamento di Rayleigh.

[...]

Scegliamo come punto di partenza le normali equazioni dell'elasticità. Per derivarle, il corpo viene considerato continuo; utilizzandole, siamo costretti ad attribuire al corpo elastico un'infinità di oscillazioni proprie. Ciò è senz'altro sbagliato: il corpo è costituito da atomi e può soltanto avere $3N$ autooscillazioni diverse.

[...]

Di conseguenza, interromperemo alla $3N$ -ma riga spettrale lo spettro calcolato in base alle equazioni dell'elasticità.

Debye dimostra che il calore specifico nel suo modello è *funzione universale* di T/Θ , dove Θ è un parametro caratteristico del solido considerato (*temperatura di Debye*). Dimostra anche che il calore specifico a basse temperature deve andare come T^3 . I solidi che non seguono la legge di D-P sono quelli che hanno una temperatura di Debye maggiore o vicina alla temperatura ambiente.

B.1: *Le teorie semiclassiche degli elettroni nei metalli*

I modelli a elettroni liberi di Drude-Lorentz hanno il grave difetto di non spiegare perché gli elettroni *non contribuiscano al calore specifico*. Inoltre, dopo la scoperta dello *spin* e del *momento magnetico* dell'elettrone (1924-25) nasce un nuovo problema: come mai i metalli non sono tutti *paramagnetici*, grazie al momento magnetico degli elettroni liberi?

I due problemi vengono affrontati in parallelo da Pauli e da Sommerfeld nel 1927. Pauli scrive a Schrödinger nel novembre 1926:

A malincuore mi sono convertito all'idea che la statistica corretta non è quella di Einstein-Bose, ma quella di Fermi.

Trattando l'insieme degli elettroni liberi come un gas di Fermi altamente degenere, è facile capire perché il paramagnetismo degli elettroni liberi sia piccolo. Nella fig. 2 sono indicate separatamente le densità degli stati in campo magnetico, per le due orientazioni dello spin: si vede che si può ridurre l'energia del sistema se alcuni elettroni passano dall'orientazione parallela a quella antiparallela.

Si tratta però di una piccola frazione del numero totale di elettroni presenti, quindi la suscettività risultante è piccola.

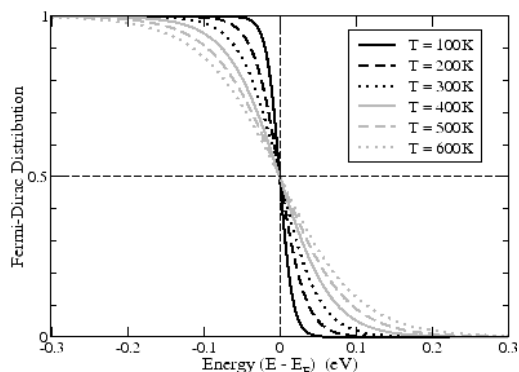


Fig. 3: Perché gli elettroni non contribuiscono al calore specifico

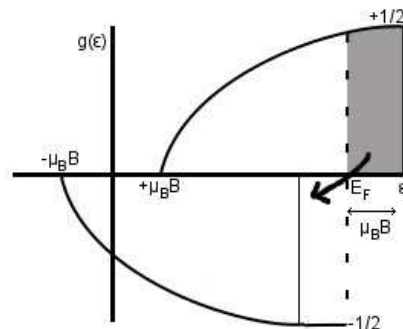


Fig. 2: Perché gli elettroni non contribuiscono al paramagnetismo

Per il calore specifico (Sommerfeld) occorre tener conto del fatto che appena sotto l'energia di Fermi non tutti gli stati sono occupati, e appena sopra non sono tutti liberi: c'è una regione di transizione dell'ordine di kT (fig. 3).

Aumentando T , solo una piccola frazione degli elettroni aumenta la propria energia. Di conseguenza il contributo al calore specifico è minore, per un fattore dell'ordine di kT/E_F , di quello previsto dalla meccanica statistica classica.

Nelle Appendici si trova una spiegazione più dettagliata delle figg. 2 e 3.

B.2: Paramagnetismo e quantizzazione del momento angolare

Sempre nel 1927 Brillouin riprende la teoria di Langevin del paramagnetismo, che era costruita sull'ipotesi *classica* di un momento magnetico che si potesse orientare *con continuità* nello spazio.

Fa uso della quantizzazione del momento angolare, a quel punto un fatto acquisito (Stern e Gerlach 1922) e ricalcola la "funzione di Langevin," che viene a dipendere dal momento angolare dell'atomo (dello ione). Ne risulta un molto miglior accordo con le misure.

B.3: Effetto termoionico

Richardson e Dushman rivedono la teoria dell'effetto termoionico sulla base del modello di Sommerfeld, e ottengono una forma diversa dell'eq. (2):

$$j = A T^2 \exp\left(\frac{-eV_{\text{ext}}}{kT}\right) \quad (4)$$

dove j è la densità di corrente, e

$$A = \frac{4\pi m_e e k^2}{h^3}. \quad (5)$$

In realtà la (2) non concorda bene coi dati sperimentali, e la teoria dovette essere in seguito raffinata tenendo conto della riflessione degli elettroni alla barriera di potenziale superficiale, e anche della struttura a bande dei livelli elettronici. Entrambi aspetti teorici che andrebbero sotto il titolo C, ma che qui tralascieremo.

C: Intervento della meccanica quantistica

Subito dopo la nascita della m.q. (1925-26), i fisici teorici s'impegnano ad applicarla ai più diversi problemi: fisica atomica, fisica molecolare, fisica dello stato solido...

C.1: Ferromagnetismo

Prima della m.q. esisteva un tentativo di teoria, quello di Weiss (1907) che postulava un'altissima suscettività magnetica, ma senza alcuna ragione fisica. La prima teoria che fa uso a fondo della m.q. è quella di Heisenberg (1928) che mostra come, sotto certe condizioni, l'interazione *elettrostatica* tra atomi vicini può favorire un *allineamento degli spin* (e quindi dei momenti magnetici).

Un miglioramento fu apportato da Bloch (1931) facendo uso della teoria delle bande (v. fra poco).

A questo punto si poteva dire che il ferromagnetismo era compreso nella sua origine fisica e che la teoria spiegava le linee dominanti dei fatti osservati. Ma si era anche compreso che si tratta di un fenomeno assai complesso, che si presenta in varianti diverse a seconda degli atomi coinvolti.

C.2: La teoria delle bande

L'idea di partenza è: come influisce la *struttura periodica* di un cristallo sulle funzioni d'onda degli elettroni atomici?

Il risultato centrale è che gli elettroni si comportano "quasi" come se fossero liberi nel cristallo, ma non tutte le energie sono permesse (ecco le *bande*) e la relazione tra impulso ed energia è *fortemente distorta*, specialmente in prossimità del limite superiore di una banda.

Bloch (1928) ricava le bande da un modello in cui un singolo elettrone si muove in un *potenziale periodico*, combinazione di quelli dei singoli atomi (il cosiddetto "tight-binding model").

Poco dopo (1930) Peierls affronta il problema da un punto di vista opposto: considerando i potenziali atomici come *piccole perturbazioni* al moto di *elettroni liberi* (“weak binding”). Scopre che i “gaps” esistono anche nel suo modello a elettroni quasi liberi. Nello stesso anno Morse dimostra che la struttura a bande è un *fatto generale* per un potenziale periodico.

Sempre nel 1930, Brillouin estende la teoria al caso realistico in *tre dimensioni*, introducendo i poliedri nello spazio degli impulsi che portano il suo nome (le *zone di Brillouin*).

1931: Wilson interpreta gli *isolanti* come cristalli con bande “piene” (contro il parere inizialmente contrario di Bloch). Mostra che in tre dimensioni bande diverse si possono *sovrapporre*, il che spiega il carattere metallico degli elementi del II gruppo. Propone anche l’interpretazione dei *semiconduttori intrinseci* come solidi con “gap stretti” e propone il ruolo delle *impurità* nei semiconduttori *non intrinseci*, come “donatori.”

Nel corso di questi anni si fa strada lentamente l’idea che i livelli liberi alla sommità di una banda quasi piena si comportano come particelle positive (i “buchi” o “lacune”) spiegando finalmente l’effetto Hall positivo.

Da qui in poi la teoria dei solidi (isolanti, metalli, semiconduttori) si sviluppa in molte direzioni, anche applicative. Basterà ricordare i *transistor*, i *LED*, i *laser a stato solido*, le *sonde Hall*, e un’infinità di altre applicazioni che costituiscono tutta l’elettronica e l’optoelettronica moderne.

Ed è ormai una teoria *integralmente quantistica*.

Tre commenti

1) In questa storia, troppo sommariamente abbozzata, colpisce come sia stata lenta e faticosa la conquista di concetti che oggi nei testi vengono presentati come lineari e quasi naturali.

Per es. la *statistica di Fermi* per gli elettroni, quando era già acquisita l’antisimmetria degli stati a più elettroni negli atomi.

Oppure il concetto dei *buchi come particelle positive*, anche questo già anticipato dalla complementarità di Pauli negli atomi, e più o meno vagamente intuito da vari ricercatori, prima di essere chiaramente formulato da Heisenberg nel 1931.

Infine, che la differenza tra *conduttori* e *isolanti* stia solo nell’avere bande parzialmente o completamente piene.

2) Non si deve dimenticare che la teoria delle bande, mentre ha costituito un salto di qualità nella comprensione fisica dello stato solido, è pur sempre un’approssimazione, in quanto trascura l’interazione fra gli elettroni. Esiste un modello (le “quasi-particelle di Landau”) che spiega perché tale approssimazione funziona in molti casi.

Il più importante fenomeno che la teoria delle bande non riesce a spiegare, perché dovuto a correlazioni fra elettroni, è la *superconduttività*. Un altro è

l'esistenza degli *isolanti di Mott*: cristalli la cui cella elementare contiene un numero dispari di elettroni, e che perciò dovrebbero essere conduttori. Esempio, l'ossido di cobalto CoO. Anche qui giocano un ruolo essenziale le correlazioni.

3) Dalla prima formulazione della m.q. (Heisenberg 1925) agli ultimi lavori che ho citato (1931) intercorrono *sei anni*. Si tratta di una vera e propria *esplosione*: un piccolo gruppo di fisici teorici usa una chiave, in gran parte fabbricata con le proprie mani, per capire i perché di un mondo già *conosciuto ma non spiegato*.

Certo la ricerca continuerà ancora a lungo (continua ancora) ma non credo che un fenomeno simile si sia prodotto né prima né dopo nella storia della fisica.

Il caso delle nane bianche

Mi sembra utile spendere qualche parola su questo argomento, anche se esula dal campo dei solidi, per varie ragioni:

- se non si tratta di solidi, si tratta pur sempre di materia condensata: altro che condensata!
- dal punto di vista teorico, l'affinità con lo stato metallico è alta: abbiamo ancora a che fare con un gas di elettroni altamente degenere
- fornisce un magnifico esempio del potere esplicativo della m.q., e anche cronologicamente si situa nella stessa epoca
- a differenza degli altri argomenti di cui ho parlato, credo che sia ben poco noto a gran parte degli insegnanti di fisica, mentre è di sicura attrattiva sui ragazzi
- si tratta di un argomento circoscritto, la cui storia si svolge lungo due secoli, e investe diversi rami della fisica: un ottimo esempio di che cos'è e come si sviluppa la ricerca scientifica.

Molto in breve: le nane bianche sono stelle assai “strane” dal punto di vista osservativo — come vedremo — la cui stessa esistenza ha costituito un mistero fino alla nascita della m.q. Come una nana bianca possa formarsi, ha potuto essere capito solo nel secolo scorso, nel quadro dei modelli sulla formazione ed evoluzione delle stelle.

La scoperta: 40 Eri B

La storia inizia nel 1783, quando W. Herschel si accorge che una stella visibile a occhio nudo, anche se non fra le più luminose (40 Eridani) è in realtà un sistema triplo. Secondo l'uso, le tre componenti vengono denominate 40 Eri A, 40 Eri B, 40 Eri C, in ordine di luminosità decrescente.

A noi interessa 40 Eri B, la cui luminosità è oltre 100 volte inferiore a 40 Eri A. Notiamo che le tre stelle stanno praticamente alla stessa distanza da noi, per cui le luminosità *apparenti* (quelle che possiamo misurare direttamente) stanno nello stesso rapporto delle luminosità *assolute*, ossia intrinseche.

Che B sia 100 volte meno luminosa di A non sarebbe in sé un problema; lo divenne però nel 1910, quando Wilhelmina Fleming determinò lo spettro di 40 Eri B, dimostrando che la sua classe spettrale è A. Per dirlo con le parole di H.N. Russell:

I knew enough about it, even in these paleozoic days, to realize at once that there was an extreme inconsistency between what we would then have called "possible" values of the surface brightness and density.

Spieghiamo. Lo studio sistematico delle luminosità assolute e delle classi spettrali delle stelle, per opera tra gli altri proprio di Russell, aveva mostrato una forte correlazione fra le due grandezze, comunemente rappresentata nel *diagramma di Herzprung–Russell*.

Nel caso di 40 Eri B, la cui distanza da noi era nota, la classe spettrale A avrebbe richiesto una luminosità apparente oltre 10^4 volte maggiore di quella osservata. Insomma, in base ai dati statistici su molte stelle, una stella di classe spettrale A, alla distanza di 40 Eri B, doveva essere fra le stelle più luminose del cielo: più di Vega, che è pure di classe A, ma quasi due volte più lontana, ma meno di Sirio, ancora di classe A ma due volte più vicina.

Il compagno di Sirio

Il secondo caso di stella anomala fu scoperto per una via diversa. Verso metà dell'800 Bessel era impegnato in misure di precisione su posizioni e moti delle stelle (ricordo di passaggio che a lui si deve la prima determinazione, nel 1838, della distanza di una stella, col metodo delle *parallasse annua*: 61 Cygni, 11.36 anni luce).

Che le stelle fisse non fossero affatto fisse era noto da oltre un secolo (Halley 1718). Ma per tutte le stelle misurate il moto, oltre che assai lento a causa della grande distanza, risultava rettilineo uniforme. Bessel scoprì che invece il moto di Sirio (α Canis Majoris) era "serpeggiante," e la stessa cosa accadeva anche per Procione (α Canis Minoris). Correttamente attribuì questa peculiarità alla presenza di un compagno non osservato: infatti in tal caso sarebbe stato il centro di massa del sistema a muoversi di moto rettilineo uniforme, mentre il moto osservato di Sirio e Procione era la composizione del moto del centro di massa e del moto orbitale attorno a questo.

Tuttavia l'osservazione diretta dei compagni di Sirio e Procione risultò assai difficile, a causa dell'elevata luminosità delle stelle principali. Solo nel 1862 Clark, con un telescopio appositamente costruito per ridurre al minimo la luce diffusa da Sirio, riuscì a vedere direttamente Sirio B. Nel 1915 Adams ne determinò lo spettro, che era simile a quello di Sirio A. Come nel caso di 40 Eri, c'era un rapporto 10^4 tra le luminosità delle due stelle, spiegabile solo con una superficie 100 volte minore e quindi un volume 10^6 volte minore. Da qui il nome di "nane bianche": nane perché assai piccole, bianche per il colore della luce emessa.

Il mistero e la soluzione

Nel frattempo erano state determinate anche le masse di 40 Eri B e di Sirio B: entrambe erano tra quella del Sole e la metà. Il che significava che dovevano avere una *densità enorme*: attorno a 10^6 volte l'acqua. Non si aveva allora nessuna idea di come potesse esistere uno stato della materia con simile densità.

Solo nel 1926 Fowler, usando la nuovissima statistica di Fermi, risolve il mistero: la materia di una nana bianca è un *plasma* di nuclei immersi in un *gas di Fermi* altamente degenere di *elettroni*. Il risultato più importante del calcolo è la *relazione massa-raggio*: finché il gas di elettroni è non relativistico, il prodotto MR^3 è costante, ossia (paradossalmente) stelle di massa maggiore hanno raggio minore.

Numericamente, una stella di massa non troppo diversa dal Sole ha un raggio di qualche migliaio di km, come quello della Terra. Proprio ciò che era richiesto dalla debole luminosità, come abbiamo visto.

Pochi anni dopo Chandrasekhar (nel 1930, a 19 anni) affronta un altro problema. Il calcolo di Fowler assumeva che il gas di elettroni fosse non relativistico, ma questo non è sempre vero in una nana bianca, perché l'energia di Fermi diventa dell'ordine di $m_e c^2$ quando la massa della stella è dell'ordine di quella del Sole. Ripetendo il calcolo con l'espressione relativistica dell'energia, Chandrasekhar arriva a un risultato nuovo: *esiste un valore limite* per la massa di una nana bianca (il cosiddetto *limite di Chandrasekhar*). Per una composizione chimica comune (circa due nucleoni per ogni elettrone) questo limite è 1.44 volte la massa del Sole.

Tuttavia il calcolo di Chandrasekhar non fu accettato subito, principalmente per l'opposizione di Eddington, che non poteva concepire l'inevitabile conseguenza: che cosa sarebbe un residuo stellare di massa superiore al limite di Chandrasekhar? Oggi sappiamo che ci sono le *stelle di neutroni*, e poi i *buchi neri*; ma a quel tempo la possibilità di una stella di neutroni non era stata ancora considerata, ed Eddington era assai riluttante ad ammettere l'esistenza dei buchi neri.

Sulla massa di Chandrasekhar c'è un commento da fare, interessante per gli argomenti dimensionali. La sua espressione (che non possiamo dimostrare) è

$$M_{\text{Ch}} = \frac{3.10}{\mu^2 m_p^2} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} = 3.10 \left(\frac{M_{\text{P}}}{\mu m_p} \right)^2 M_{\text{P}} \quad (6)$$

dove m_p è la massa del protone e μ è il numero medio di nucleoni per elettrone (circa 2 per gli elementi leggeri escluso l'idrogeno). M_{P} è la *massa di Planck*

$$M_{\text{P}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \simeq 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ g.} \quad (7)$$

Nella (6) figurano *due masse indipendenti*, per cui sarebbe impossibile arrivare all'espressione corretta con argomenti dimensionali. Il peggio è che $M_{\text{P}}/m_{\text{p}}$ è dell'ordine di 10^{19} e figura al quadrato: il risultato è che partendo da masse comunque piccole, si ottiene per M_{Ch} un valore dell'ordine della massa del Sole, come già detto.

Una trattazione più dettagliata di tutto questo argomento si trova per es. in [4].

Conclusione

Tornando a quanto dicevo all'inizio, dovrebbe esser chiaro che nella storia che ho troppo sommariamente delineata non hanno avuto alcun posto l'indeterminismo, l'influenza dell'osservatore. . .

Ciò non significa che gli stessi studiosi che hanno costruito la teoria dei solidi non fossero anche interessati ai fondamenti della m.q. Ma quando parlavano dei fondamenti e degli aspetti filosofici, avevano un profondo retroterra di *conoscenza diretta* della teoria, del modo di usarla, dei risultati che dava.

Questo bisognerebbe tener presente anche nell'insegnamento secondario per ripristinare l'equilibrio:

- partire dai *fatti* e dai *problemi* non risolti
- mostrare come e quanto la *m.q.* spiega e prevede
- *solo alla fine* discutere le questioni d'interpretazione.

Appendice 1: Il paramagnetismo degli elettroni in un metallo

La fig. 2 rappresenta la densità degli stati del gas di elettroni in presenza di campo magnetico, distinta a seconda dell'orientazione dello spin.

Cominciamo ignorando il campo magnetico. Il gas di elettroni occupa l'intero volume V del solido; gli elettroni sono liberi, quindi la loro energia è soltanto cinetica: $E = p^2/(2m_e)$. La densità degli stati si calcola nel modo più semplice usando la prescrizione: esiste uno stato per ogni cella di volume h^3 nello spazio delle fasi.

Se consideriamo una regione di spazio delle fasi definita per la parte spaziale dall'intero volume V , e per il modulo dell'impulso dall'intervallo tra p e $p + dp$, questa regione avrà volume $4\pi V p^2 dp$ e conterrà pertanto un numero di stati

$$dN = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp \propto p^2 dp. \quad (\text{A1.1})$$

(il simbolo \propto qui va letto come “a meno di fattori costanti”). Dato che $E \propto p^2$, si ha $p^2 dp \propto \sqrt{E} dE$; quindi per la densità degli stati $g(E)$:

$$g(E) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dN}{dE} \propto \sqrt{E}. \quad (\text{A1.2})$$

Il grafico di $g(E)$ è una parabola (più esattamente una semiparabola nel semipiano superiore). A rigore, in assenza di campo magnetico $g(E)$ raddoppia causa la degenerazione di spin, ma noi stiamo rappresentando la densità degli stati a meno di un fattore costante.

Per un gas ad alta degenerazione ($kT \ll E_F$, v. App. 2) tutti gli stati sono occupati fino all'energia E_F .

Se è presente un campo magnetico \vec{B} , all'energia di ciascun elettrone si aggiunge un termine

$$-\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \pm \mu_B B. \quad (\text{A1.3})$$

Dato che per un elettrone (negativo) $\vec{\mu}$ è opposto allo spin \vec{s} , il segno + vale per spin parallelo a \vec{B} , il segno - per spin antiparallelo. Con μ_B ho indicato il *magnetone di Bohr*:

$$\mu_B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e\hbar}{2m_e c} \quad (\text{unità di Gauss}). \quad (\text{A1.4})$$

Pertanto il grafico di $g(E)$ verrà traslato di $\mu_B B$ verso destra per spin parallelo, verso sinistra per spin antiparallelo.

Nella figura si è fatto ricorso a un espediente grafico per evitare la sovrapposizione delle due curve: la curva per spin antiparallelo è stata tracciata nel semipiano negativo. Naturalmente la densità degli stati è sempre positiva, ma in questo modo la figura diventa molto più leggibile.

Lo spostamento di $\pm \mu_B B$ delle due curve ha però una conseguenza fisica: l'energia del sistema può diminuire se alcuni elettroni con spin parallelo *invertano* il proprio spin. Questa non è che l'orientazione attesa dei momenti magnetici in campo magnetico; ma come si vede dalla figura, l'orientazione interesserà solo una piccola frazione del numero totale di elettroni: quelli che hanno energia vicina a E_F .

L'orientazione degli spin avrebbe per effetto una *magnetizzazione* del campione, quindi un contributo alla suscettività paramagnetica. Ma già da questa discussione semiquantitativa si capisce che il contributo sarà trascurabile.

Appendice 2: Il contributo degli elettroni al calore specifico dei metalli

In fig. 3 sono disegnati i grafici della probabilità $p(E)$ di occupazione di uno stato in funzione della sua energia, a diverse temperature. Questa non è che la funzione di Fermi:

$$p(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)}. \quad (\text{A2.1})$$

È utile ricordare la proprietà di simmetria di $p(E)$:

$$p(E_F + \varepsilon) + p(E_F - \varepsilon) = 1. \quad (\text{A2.2})$$

In particolare, $p(E_F) = \frac{1}{2}$.

La funzione $p(E)$ si scosta da un gradino solo per $|E - E_F| \lesssim kT$: per es. $p(E_F + kT) = 0.27$, $p(E_F - kT) = 0.73$. Ne segue che mentre allo zero assoluto tutti i livelli fino a E_F sono occupati, e tutti quelli al di sopra sono vuoti, per $T > 0$ c'è una piccola regione di energie, appunto dell'ordine di kT , in cui si spopolano parzialmente i livelli sotto E_F e si popolano parzialmente quelli al disopra. Di conseguenza l'energia del gas di elettroni aumenta al crescere di T , e ciò equivale a dire che c'è un contributo positivo al calore specifico.

Tuttavia solo una frazione dell'ordine di kT/E_F del totale degli elettroni guadagna energia, e l'incremento medio è kT . Ciò è quanto dire che l'energia interna cresce di k^2T^2/E_F per elettrone, contro il $3kT/2$ della meccanica statistica classica. Perciò anche il contributo al calore specifico del gas di elettroni è più piccolo per un fattore kT/E_F di quello previsto dalla teoria classica. Facendo i conti più accurati, e considerato che in un metallo E_F va da 1.5 eV in su, mentre per $T = 300$ K si ha $kT = 0.026$ eV, si vede che a temperatura ambiente il contributo degli elettroni al calore specifico ammonta al più all'1%.

Osservazione: Può forse disorientare il lettore il fatto che tra queste Appendici ci siano delle differenze di trattamento per quello che alla base è lo stesso problema: la meccanica statistica di un gas di elettroni non interagenti.

Infatti in App. 1 viene data la densità $g(E)$ degli stati, ma non si dice niente sull'effetto di una $T > 0$: si assume che tutti i livelli siano occupati fino a E_F e vuoti al disopra. Invece in questa App. si è usata la distribuzione di Fermi per la probabilità di occupazione $p(E)$ e non si è tenuto conto della densità $g(E)$.

Abbiamo visto che a temperatura ambiente $kT \ll E_F$; ma in che relazione stanno $\mu_B B$ e kT ? Se prendiamo un campo tipico: $B = 1$ T = 10^4 gauss, abbiamo $\mu_B B \simeq 6 \cdot 10^{-5}$ eV $\ll kT$. Ciò significa che non si potrebbe trascurare la distribuzione della popolazione attorno a E_F nel calcolo del contributo degli elettroni al paramagnetismo. Si può tuttavia intuire che l'effetto (una dipendenza della suscettività dalla temperatura) sarà comunque piccolo.

Un argomento simile vale per la teoria di Sommerfeld del calore specifico degli elettroni: qui andrebbe usata non $p(E)$ ma il prodotto $g(E)p(E)$. Il risultato, che il contributo degli elettroni al calore specifico è piccolo, non cambia.

Bibliografia

- [1] Becker, R. *Teoria della Elettricità* (trad. ital. Sansoni, Firenze, 1950), Vol. II, 192.
- [2] Kittel, C. *Introduction to Solid State Physics* (Wiley, New York, 1953, second edition), probl. 9.5, 231.
- [3] Feynman, R.P., Leighton, R.B., Sands, M. *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, Reading, 1965), Vol. 2, 34-2 - 34-3.
- [4] <http://www.sagredo.eu/irg/irg13.pdf>