

CAPITOLO 3

Coordinate e metrica: secondo esempio

Nelle coordinate t, r, φ, z sia data la metrica:

$$d\tau^2 = (1 - \omega^2 r^2) dt^2 - dr^2 - 2\omega r^2 dt d\varphi - r^2 d\varphi^2 - dz^2. \quad (3-1)$$

Sebbene l'uso dei nomi suggerisca che r, φ, z hanno qualcosa a che fare con le coordinate cilindriche, occorre insistere che *non siamo autorizzati* a trarre conclusioni finché non abbiamo studiato le proprietà della metrica. Anzi questa non è sufficiente per darci le proprietà topologiche globali dello spazio-tempo; dobbiamo aggiungere quanto segue:

$$t \in \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad z \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

e inoltre che $\varphi = 0$ e $\varphi = 2\pi$ rappresentano lo stesso punto (il che a rigore vuol dire che quella così fornita non è una carta, e che per descrivere correttamente questo spazio dovremmo darne due o forse più: lasciamo la questione come esercizio).

Possiamo trascurare z per le ragioni già viste nell'altro esempio; cominciamo a studiare la coordinata t . Per $dr = 0 = d\varphi$ si ha $d\tau = \sqrt{1 - \omega^2 r^2} dt$ e quindi

$$\frac{d\tau_2}{d\tau_1} = \sqrt{\frac{1 - \omega^2 r_2^2}{1 - \omega^2 r_1^2}}. \quad (3-2)$$

Poiché la metrica è invariante per traslazioni della t , la (3-2) ci dice subito che *esiste un redshift* in direzione r (in realtà è un redshift se $r_1 > r_2$; altrimenti è un *blueshift*).

Quanto alle altre coordinate, la discussione su r è molto semplice: r è ovviamente di tipo spaziale, e misura direttamente la distanza propria per eventi con $dt = 0 = d\varphi$. Sulla coordinata φ torneremo fra poco.

Che succede per $r > 1/\omega$?

Ci si può chiedere se sia stato giusto scrivere $r \in \mathbb{R}^+$, dal momento che per $r > 1/\omega$ il coefficiente di dt^2 nella (3-1) diventa negativo: questo non viola la condizione sulla segnatura della metrica?

La prima risposta è che la segnatura va verificata sulla forma *diagonalizzata* della metrica, ma possiamo anche vedere la questione, in termini più fisici, al modo seguente. La condizione sulla segnatura equivale a chiedere che in ogni punto dello spazio-tempo si possano trovare tre direzioni (indipendenti) di tipo spaziale e una di tipo temporale.

Se $r < 1/\omega$ la cosa è ovvia: tenendo costanti r , φ e z e variando soltanto t si trova $d\tau^2 = (1 - \omega^2 r^2) dt^2 > 0$, cioè uno spostamento in direzione temporale; se invece facciamo variare solo r oppure solo φ o z troviamo, in tutti e tre i casi, $d\tau^2 < 0$ che indica spostamenti di tipo spaziale. Dunque la condizione è soddisfatta.

Se invece $r \geq 1/\omega$ lo spostamento in direzione t non è più temporale, e questo crea il problema. Basta però dimostrare che uno spostamento temporale esiste: è immediato verificare che con r e z ancora costanti, e con $d\varphi = -\omega dt$ otteniamo proprio quello che ci serve.

Conclusione: non ci sono ragioni per proibire i valori di r maggiori di $1/\omega$. Ma qual è allora il significato (se esiste) del cambiamento di segno nel coefficiente di dt^2 ? La risposta è già implicita in ciò che abbiamo appena detto: gli spostamenti in direzione t sono *spaziali*, non temporali. Ne segue tra l'altro che non è possibile (per $r > 1/\omega$) tenere un oggetto materiale (ad es. un orologio) "fermo" rispetto alle coordinate r , φ , z : rispetto a un RIL tale oggetto si muoverebbe a velocità maggiore di quella della luce.

La propagazione della luce lungo φ

La discussione sulla coordinata φ è molto più delicata, sempre perché la metrica non è diagonale. Per capire quello che succede, studiamo la propagazione della luce a r costante ($< 1/\omega$).

Imponendo al solito $d\tau = 0$ troviamo $dt = \pm r (d\varphi + \omega dt)$ da cui

$$r d\varphi = (1 - \omega r) dt \quad \text{oppure} \quad r d\varphi = -(1 + \omega r) dt$$

a seconda del verso di propagazione. Se mettiamo due orologi in φ_1 e φ_2 , con $\varphi_2 > \varphi_1$ e $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ avremo:

$$\begin{aligned} \text{per un segnale da 1 a 2: } t_r^{(2)} &= t_e^{(1)} + \frac{r\Delta\varphi}{1 - \omega r} \\ \text{" da 2 a 1: } t_r^{(1)} &= t_e^{(2)} + \frac{r\Delta\varphi}{1 + \omega r} \end{aligned}$$

e in tutti i casi, per un orologio fermo, $\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \omega^2 r^2}$.

Se leggiamo dalla (3-1) che punti con diverse φ (e uguali t) hanno distanza spaziale $\Delta l = r \Delta\varphi$, arriviamo alla conclusione che le velocità di propagazione nei due versi sono rispettivamente:

$$\sqrt{\frac{1 - \omega r}{1 + \omega r}} \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{1 + \omega r}{1 - \omega r}}.$$

Ci troviamo così di fronte a un risultato paradossale: dopo aver asserito che la velocità della luce è sempre uguale a 1, come si vede dalla condizione $d\tau = 0$

che abbiamo usata per studiare le geodetiche della luce, ora arriviamo a valori diversi. Bisogna però ricordare che il principio di equivalenza ci assicura solo che la velocità della luce sarà 1 in ogni RIL (e ciò basta per imporre $d\tau = 0$); per capire il significato “operativo” dell’espressione “velocità della luce” in altri riferimenti dobbiamo studiare meglio le misure di tempo e di distanza.

Dunque nel nostro caso la conclusione sarebbe affrettata, in particolare perché non abbiamo ancora approfondito a sufficienza il significato della coordinata t .

Sincronizzazione degli orologi

Possiamo tentare di cancellare il risultato fastidioso circa la propagazione della luce, interpretandolo come un *difetto di sincronizzazione degli orologi* a diversi φ . Cerchiamo dunque di eliminare l’effetto ridefinendo la relazione fra la coordinata t e il tempo τ segnato dagli orologi reali posti nei diversi punti (con $r = \text{cost.}$, $\varphi = \text{cost.}$).

Da quello che sappiamo, è naturale tentare la posizione

$$\tau = t \sqrt{1 - \omega^2 r^2} + \alpha \varphi$$

dove α dovrà essere determinato in modo che sia

$$\tau_r^{(2)} - \tau_e^{(1)} = \tau_r^{(1)} - \tau_e^{(2)}.$$

Si trova $\alpha = -\omega r^2 / \sqrt{1 - \omega^2 r^2}$ e quindi:

$$\tau = t \sqrt{1 - \omega^2 r^2} - \frac{\omega r^2 \varphi}{\sqrt{1 - \omega^2 r^2}} \quad (3-3)$$

$$\tau_r - \tau_e = \frac{r \Delta\varphi}{\sqrt{1 - \omega^2 r^2}}. \quad (3-4)$$

Il problema sembra risolto. Nasce però una difficoltà: la sincronizzazione così ottenuta non può essere estesa a tutto il cerchio. Infatti per $\Delta\varphi = 2\pi$ la (3-3) porta a una differenza $\Delta\tau \neq 0$. Se dunque abbiamo molti orologi lungo la circonferenza, e sincronizziamo ciascuno col precedente usando la (3-3), ad es. in senso antiorario, dopo fatto un giro completo si torna all’orologio di partenza ma non lo si trova sincronizzato con l’ultimo. Lo stesso problema si presenta lungo qualsiasi curva chiusa, anche non concatenata con l’asse di rotazione: perciò *la sincronizzazione cercata è impossibile*.

Misura delle distanze e metrica spaziale

Con un procedimento analogo a quello descritto per la sincronizzazione, si può tentare una definizione operativa di distanza (tecnica radar): assumiamo

come distanza fra due punti nel nostro spazio quella ottenuta dal tempo di andata e ritorno di un segnale radio. È chiaro che se i due punti hanno la stessa φ (e sono molto vicini) troveremo

$$\Delta l = \Delta r, \quad (3-5)$$

il che conferma quanto avevamo già visto circa il significato della coordinata r . Invece per punti con la stessa r si avrà, dalla (3-4), o anche dal calcolo con le t_e, t_r :

$$\Delta l = \frac{r \Delta \varphi}{\sqrt{1 - \omega^2 r^2}}. \quad (3-6)$$

Però la (3-6) non concorda con quanto sembra potersi dedurre dalla (3-1) (e che abbiamo già usato): $\Delta l = r \Delta \varphi$. Come mai?

La spiegazione sta ancora una volta nella sincronizzazione. Se misuriamo, a partire dalla metrica (3-1), la distanza fra due eventi *allo stesso* t , troviamo indubbiamente $\Delta l = r \Delta \varphi$. Ma se invece usiamo la sincronizzazione (3-3), la distanza andrà misurata fra eventi che non hanno lo stesso t : in tal caso l'uso della solita metrica fornisce proprio la (3-6). Si noti infine che con Δl dato dalla (3-6) e $\Delta \tau$ dato dalla (3-4) la velocità della luce risulta banalmente 1.

Combinando le (3-5) e (3-6), saremmo indotti a scrivere una “metrica spaziale”

$$d\sigma^2 = dr^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{1 - \omega^2 r^2} \quad (3-7)$$

che appare quella di una geometria non euclidea. In molti testi classici di relatività generale (non nei più recenti) tale conclusione viene esplicitamente asserita. Va però osservato che la (3-7) *non è la metrica di nessuna sezione spaziale dello spazio-tempo descritto dalla metrica* (3-1).

Sia infatti $t = f(r, \varphi)$ l'equazione della sezione spaziale cercata. Vogliamo determinare $f(r, \varphi)$ in modo che sostituita per t nella (3-1) porti alla (3-7). È facile vedere che ciò richiede

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\omega r^2}{1 - \omega^2 r^2},$$

ma queste non sono compatibili tra loro.

Problema: Dimostrare che se la $f(r, \varphi)$ esistesse, risolverebbe anche il problema della sincronizzazione. Si vede così che esiste una stretta connessione fra i due problemi.

Interpretazione fisica

Restano ancora da capire due cose:

- Un problema matematico: lo spazio-tempo descritto dalla (3-1) è curvo?
- Un problema fisico: esiste una situazione reale correttamente descritta dalla metrica (3-1)?

Le “stranezze” che abbiamo trovato sembrano indicare che si tratti di una situazione fisicamente irrealizzabile; invece la risposta si ottiene immediatamente dalla seguente trasformazione di coordinate: in luogo della φ , usiamo

$$\psi = \varphi + \omega t.$$

Si ottiene subito

$$d\tau^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\psi^2 - dz^2$$

che è la metrica di Lorentz in coordinate cilindriche. Dunque:

- 1) la geometria è lorentziana
- 2) r, ψ, z sono le ordinarie coordinate cilindriche, e t è il tempo di un riferimento inerziale
- 3) i punti $\varphi = \text{cost.}$ ruotano con velocità angolare costante ω rispetto a un riferimento inerziale
- 4) la singolarità in $r = 1/\omega$ non è della geometria dello spazio-tempo, ma solo del sistema di coordinate
- 5) sembra dunque che le coordinate spaziali usate in partenza siano quelle adatte a un *referimento rigido in rotazione uniforme*.

Occorre però fare due osservazioni:

- Se è vero che la singolarità in $r = 1/\omega$ non esiste, è anche vero che il riferimento rotante, e di conseguenza il suo sistema di coordinate *spaziali* r, φ, z non può essere esteso al di là di $r = 1/\omega$, perché i suoi punti dovrebbero muoversi — rispetto al riferimento inerziale — con velocità maggiore di quella della luce.
- Il problema che abbiamo incontrato a proposito della sincronizzazione degli orologi si traduce, nel riferimento rotante, in un effetto reale, che si chiama *effetto Sagnac*: lo spostamento delle frange d’interferenza fra due onde che si propagano nei due versi in un riferimento rotante.

L’effetto Sagnac è così reale, che su di esso sono oggi basati sistemi di navigazione inerziale per aerei: in un “laser ad anello,” montato solidale all’aereo, si propagano due modi che hanno la stessa frequenza finché l’aereo non ruota, ma danno battimenti quando l’aereo fa una virata. È così possibile conoscere a ogni istante l’orientamento dell’aereo, senza bisogno di riferimenti esterni (come sarebbe il campo magnetico terrestre per una bussola).

Una metrica con proprietà simili a quella ora studiata si presenta nello spazio-tempo attorno a una massa in rotazione (*effetto Lense–Thirring*).

Il problema del riferimento rotante

Il riferimento rotante ha avuto un grande ruolo nella nascita della RG. Infatti è stato proprio riflettendo a questo problema che Einstein è arrivato (per

una strada diversa da quella qui descritta) a ritenere che in quel riferimento lo spazio non fosse euclideo. D'altra parte nel riferimento si sente una forza centrifuga, assimilabile — per il principio di equivalenza — a un campo gravitazionale; Einstein ne concluse che doveva esserci una connessione tra gravità e curvatura.

Abbiamo visto che in realtà è difficile parlare di spazio non euclideo nel nostro caso, mentre d'altra parte la curvatura dello spazio-tempo è intrinseca, e quindi c'è o non c'è indipendentemente dalle coordinate che si adottano. Se lo spazio-tempo è piatto, rimane tale anche se visto da un riferimento non inerziale. Tuttavia è indubbio che l'argomento di Einstein sia stato un passaggio importante per la costruzione della RG.

Al punto 5) del par. precedente abbiamo detto, in forma dubitativa: “sembra che le coordinate spaziali usate in partenza siano quelle adatte a un riferimento rigido in rotazione uniforme.” Perché “sembra”? Il punto è che approfondendo l'analisi sorgono alcune difficoltà.

In primo luogo, siamo costretti ad ammettere che nel riferimento rotante la luce ha velocità di propagazione diverse nei due sensi. Non solo: se studiamo la propagazione radiale, troviamo che la luce non viaggia in linea retta, e per di più non percorre la stessa traiettoria all'andata e al ritorno (lasciamo la verifica di tutto ciò al lettore).

A questo punto diventa lecita la domanda: che cosa sappiamo delle leggi fisiche che debbono valere in un riferimento rotante? Peggio ancora: come si definisce esattamente un riferimento *rigido* in rotazione? Per quanto possa apparire strano, la questione non è ancora risolta, e qui dobbiamo lasciarla in sospeso, per passare ad altri argomenti di maggiore interesse concreto.