

## O10. L'approssimazione di Huygens-Fresnel e la diffrazione

### La forma integrale di Kirchhoff

Una formulazione del principio di Huygens che supera l'ottica geometrica, e consente di comprendere la diffrazione, fu enunciata da Fresnel; in seguito Kirchhoff mostrò che seguiva dall'equazione di Helmholtz. La forma di Kirchhoff (che non dimostriamo) è la seguente:

$$E(P) = \alpha \int_S dS \frac{e^{inkr}}{r} a(\omega) E(Q) \quad (\text{O10.1})$$

dove (fig. O10-1)  $S$  è una superficie chiusa,  $P$  un punto a essa interno,  $Q$  il generico punto di  $S$ ; inoltre  $r = \overline{QP}$ , e  $\omega$  è l'angolo tra la normale interna in  $Q$  e il vettore  $\overline{QP}$ . Infine  $a(\omega)$  è il cosiddetto "fattore di obliquità," che non specifichiamo (però  $a(0) = 1$ );  $\alpha$  è una costante.

Il significato della (O10.1) è il seguente: l'ampiezza ( $a$ ) dell'onda in  $P$  può essere calcolata quando essa sia nota in tutti i punti di una superficie  $S$  che racchiude  $P$ . Più esattamente l'ampiezza in  $P$  è la somma delle ampiezze di ciascuna onda elementare, a sua volta proporzionale all'ampiezza dell'onda incidente in  $Q$ .

Si vede che le onde che arrivano in  $P$  hanno ciascuna la sua fase, e possono perciò interferire in modo costruttivo o distruttivo: in questo consiste la novità dell'enunciato di Fresnel rispetto a quello di Huygens, che è soltanto geometrico. Il principio di Huygens-Fresnel (H-F) non dà solo la forma della superficie d'onda, ma anche l'ampiezza dell'onda stessa, che l'ottica geometrica non considera.

Va precisato che anche la (O10.1), come dimostrò Kirchhoff, è approssimata, e anche in questo caso si tratta di un'approssimazione valida per le piccole lunghezze d'onda; ma essa sta all'ottica geometrica come uno sviluppo in serie arrestato al 1° ordine sta allo sviluppo all'ordine zero: è un'approssimazione migliore, e soprattutto descrive fenomeni che l'ottica geometrica cancella del tutto (la diffrazione).

Per le nostre applicazioni la (O10.1) può essere ulteriormente semplificata. Supponiamo infatti:

- 1) che la superficie  $S$  sia tale che  $E$  sia diverso da zero solo su una sua parte  $S_1$ ;
- 2) che su  $S_1$  si possa supporre  $E$  costante;

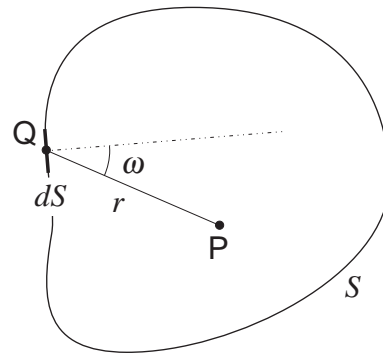


Fig. O10-1

- 3) che il punto P sia a distanza grande da  $S_1$ , o comunque che  $r$  possa essere supposto costante nel denominatore;
- 4) che l'angolo  $\omega$  sia sempre vicino a zero.

In tutte queste ipotesi la (O10.1) diviene:

$$E(P) = \beta \int_{S_1} dS e^{inkr} \quad (\text{O10.2})$$

dove  $\beta$  è una nuova costante, che ingloba  $1/r$  ed  $E(Q)$ .

Si noti che la nuova approssimazione che ha portato alla (O10.2) non ha niente a che fare con le approssimazioni precedenti, che hanno portato all'ottica geometrica o al principio di H-F: quelle implicano la lunghezza d'onda, mentre questa ne è del tutto indipendente.

### La diffrazione nel fuoco

Applichiamo subito il principio di H-F, nella forma (O10.2), a un caso importante. Consideriamo un'onda sferica convergente, ad es. prodotta da una lente, e delimitata da un diaframma (pupilla d'uscita). Sia F il centro dell'onda (fuoco): vogliamo calcolare l'intensità della luce in un punto P nei dintorni di F. Supporremo inoltre che l'onda si propaghi nel vuoto ( $n = 1$ ).

Sia  $l$  la distanza tra il bordo della p.u. e il fuoco F (fig. O10-2); è chiaro che la (O10.2) può essere usata se la distanza di P dall'asse è molto minore di  $l$ . Assumeremo come superficie  $S_1$  la calotta sferica di raggio di curvatura  $l$  e diametro  $d$  (la superficie S si chiude con lo schermo e con una semisfera di raggio  $\rightarrow \infty$ , dove certamente l'onda si annulla).

Data la simmetria del problema possiamo supporre P nel piano  $xy$  ( $z = 0$ ): dovremo dunque calcolare la (O10.2) con

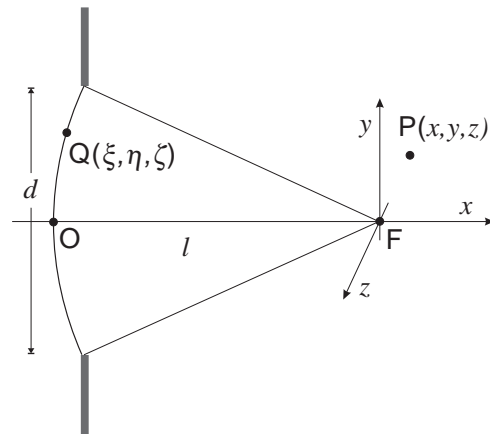


Fig. O10-2

$$\begin{aligned} r^2 &= (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \zeta^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2x\xi - 2y\eta + x^2 + y^2 \\ &= l^2 - 2x\xi - 2y\eta + x^2 + y^2 \simeq l^2 - 2x\xi - 2y\eta \end{aligned}$$

(l'ultimo passaggio consiste nel trascurare termini di 2° ordine in  $x/l$  e  $y/l$ ). Ancora: da  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = l^2$  si ha

$$\xi \simeq -l + \frac{\eta^2 + \zeta^2}{2l}$$

O10-2

a meno di termini del 4° ordine in  $\eta/l$  e  $\zeta/l$ . Dunque:

$$r^2 = l^2 - 2y\eta + 2lx - \frac{x}{l}(\eta^2 + \zeta^2)$$

da cui

$$r = l + x - y \frac{\eta}{l} - x \frac{\eta^2 + \zeta^2}{2l^2}$$

avendo trascurato termini di 2° ordine in  $x/l$  e superiori al 2° in  $\eta/l$  e  $\zeta/l$ .

La (O10.2) diventa allora

$$\begin{aligned} E(\mathbf{P}) &= \beta \int_{S_1} dS \exp \left[ ik \left( l + x - y \frac{\eta}{l} - x \frac{\eta^2 + \zeta^2}{2l^2} \right) \right] \\ &= \beta e^{ik(l+x)} \int_{S_1} dS \exp \left[ -ik \left( y \frac{\eta}{l} + x \frac{\eta^2 + \zeta^2}{2l^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

L'integrale sulla calotta  $S_1$  si scrive:

$$\int_{S_1} dS = \int_C \frac{d\eta d\zeta}{\cos(\nu x)}$$

dove  $\nu$  indica la normale interna alla calotta e  $C$  è il cerchio di diametro  $d$ . Se supponiamo  $d \ll l$ , possiamo approssimare il coseno con 1. Ponendo:

$$\varrho^2 = \frac{\eta^2 + \zeta^2}{l^2} \quad \frac{\eta}{l} = \varrho \cos \varphi \quad \bar{\varrho} = \frac{d}{2l}$$

si arriva infine a:

$$E(\mathbf{P}) = \beta l^2 e^{ik(l+x)} \int_0^{\bar{\varrho}} \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \exp \left[ -ik \left( y\varrho \cos \varphi + \frac{1}{2}x\varrho^2 \right) \right]. \quad (\text{O10.3})$$

Per  $x = y = 0$ , cioè nel punto F, si ottiene subito:

$$E(\mathbf{F}) = \beta l^2 \pi \bar{\varrho}^2 e^{ik(l+x)}$$

e conviene scrivere la (O10.3) così:

$$E(\mathbf{P}) = E(\mathbf{F}) \frac{1}{\pi \bar{\varrho}^2} \int_0^{\bar{\varrho}} \varrho d\varrho e^{-\frac{i}{2}kx\varrho^2} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-iky\varrho \cos \varphi}. \quad (\text{O10.4})$$

O10-3

Studieremo la (O10.4) in due casi particolari, sufficientemente semplici: fissando il punto P sull'asse ottico ( $y = 0$ ) oppure nel piano focale ( $x = 0$ ).

**A:** P sull'asse ottico ( $y = 0$ ). Allora:

$$E(P) = E(F) \frac{2}{\bar{\varrho}^2} \int_0^{\bar{\varrho}} \varrho d\varrho e^{-\frac{i}{2} kx \varrho^2} = E(F) \frac{2i}{kx \bar{\varrho}^2} \left( e^{-\frac{i}{2} kx \bar{\varrho}^2} - 1 \right).$$

Interessa di più l'intensità:

$$|E(P)|^2 = |E(F)|^2 \left( \frac{\sin \frac{1}{4} kx \bar{\varrho}^2}{\frac{1}{4} kx \bar{\varrho}^2} \right)^2$$

il cui andamento in funzione di  $x$  è mostrato in fig. O10-3.

Possiamo ora utilizzare questo risultato per vedere che cosa significa “mettere a fuoco.” Dato che l'intensità varia gradualmente, non c'è una messa a fuoco definita: occorre perciò ricorrere a dei criteri convenzionali. Uno di questi consiste nel vedere quando l'intensità massima al centro dell'immagine è diminuita di un fattore determinato. Questo è il

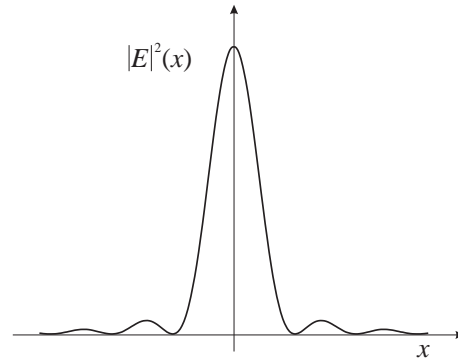


Fig. O10-3

*Criterio di Strehl:* La messa a fuoco è buona finché l'intensità massima non si riduce a meno dell'80%.

Si vede facilmente che questo limite si raggiunge per  $\frac{1}{4} kx \bar{\varrho}^2 \simeq 0.81$ . Sostituendo  $k = 2\pi/\lambda$  e  $\bar{\varrho} = d/2l$  si arriva a

$$x \simeq 0.81 \frac{8}{\pi} \frac{l^2}{d^2} \lambda \simeq 2 \frac{l^2}{d^2} \lambda.$$

Si può dimostrare, usando l'invariante di Lagrange, che  $l/d = f/p_e = n$  (apertura relativa) e si ha infine:

$$x \simeq 2n^2 \lambda.$$

Nelle nostre approssimazioni abbiamo trovato che quando P è sull'asse ottico ( $x = 0$ ) si ha:  $r = \overline{QP} = l + x - \frac{1}{2} x \varrho^2$  mentre  $\overline{OP} = l + x$ . Dunque la differenza di cammino ottico tra il raggio principale (passante per O) e quello marginale per Q è data da  $\overline{OP} - \overline{QP} = \frac{1}{2} x \varrho^2$ . In altre parole, le onde elementari non arrivano in fase nel punto P, e questo spiega perché l'intensità decresce rispetto

a quella in F. Vediamo quanto vale questa differenza  $\frac{1}{2}x\rho^2$  quando è soddisfatto il criterio di Strehl:

$$\frac{1}{2}x\rho^2 = \frac{2}{k} \left( \frac{1}{4}kx\rho^2 \right) = \frac{\lambda}{\pi} \cdot 0.81 \simeq \frac{\lambda}{4}.$$

Il raggio marginale è dunque sfasato di circa  $\lambda/4$  rispetto al raggio principale. Questo modo di vedere la cosa porta a un altro classico criterio per determinare la posizione critica di sfocamento, ossia il

*Criterio di Rayleigh*: La messa a fuoco risulta buona nei punti P dell'asse ottico per i quali la differenza di cammino ottico tra il raggio marginale e quello principale non supera  $\lambda/4$ .

Come si è visto sopra, in questo caso (onda sferica senza aberrazione sferica) i due criteri praticamente coincidono. Vediamo ora alcuni esempi numerici.

1. Con quale precisione va posto uno schermo al telescopio Hale di M. Palomar per avere un'immagine a fuoco (secondo i criteri suddetti) nel limite della risoluzione teorica? (Dati:  $d = 5$  m,  $n = 3.3$ ).

$$x = 2n^2\lambda = 2 \cdot 10.9 \cdot 0.55 \mu\text{m} = 12 \mu\text{m}.$$

Ora una tale precisione è irraggiungibile, in quanto solo le dilatazioni termiche cui è sottoposta la struttura portano a spostamenti dell'ordine di centinaia di  $\mu\text{m}$  per grado di variazione. La cosa però è meno drammatica di quanto sembra, in quanto la risoluzione teorica di tale telescopio, come si è visto, sarebbe di  $0''.024$  e il solo seeing moltiplica almeno per un fattore 10 tale limite di risoluzione.

2. Stesso problema con  $d = 100$  mm,  $f = 1$  m,  $n = 10$  (un tipico riflettore da dilettante).

$$x = 2 \cdot 100 \cdot 0.55 \mu\text{m} = 0.11 \text{ mm}.$$

Dunque la messa a fuoco va corretta a meno di un decimo di mm.

**B:** P nel piano focale ( $x = 0$ ). Si ha:

$$E(\text{P}) = E(\text{F}) \frac{1}{\pi \bar{\rho}^2} \int_0^{\bar{\rho}} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-iky\rho \cos \varphi}.$$

Poniamo

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-iu \cos \varphi}. \quad (\text{O10.5})$$

La funzione  $J_0(u)$  (che è reale, contro l'apparenza) fa parte della famiglia delle *funzioni di Bessel*, e si ha l'identità:

$$u J_0(u) = \frac{d}{du} (u J_1(u))$$

dove  $J_1(u)$  è un'altra funzione di Bessel. Si tratta di funzioni largamente studiate e tabulate, delle quali per ora occorre sapere solo poche proprietà:

- 1)  $J_0(0) = 1$ , evidente dalla definizione;
- 2)  $J_1(u) = \frac{1}{2}u + O(u^2)$ : questo si vede da  $u J_1(u) = \int_0^u u' J_0(u') du'$  e da 1).

Sostituendo nella (O10.5), con  $u = ky\bar{\rho}$

$$E(P) = E(F) \frac{2}{k^2 y^2 \bar{\rho}^2} \int_0^{ky\bar{\rho}} u du J_0(u) = E(F) \frac{2}{k^2 y^2 \bar{\rho}^2} ky\bar{\rho} J_1(ky\bar{\rho}) = E(F) \frac{2J_1(ky\bar{\rho})}{ky\bar{\rho}}.$$

Si osserva da qui che per  $y \rightarrow 0$ ,  $E(P) \rightarrow E(F)$  come doveva. Il rapporto  $E(P)/E(F)$  è mostrato in fig. O10-4: esso ha un andamento oscillante fortemente smorzato, con zeri non equidistanti, ma quasi. Se ricordiamo che  $y$  è la distanza dall'asse ottico, la curva di fig. O10-4 dice che l'immagine avrà un massimo d'intensità nel centro, una diminuzione fino a zero, poi una ripresa seguita da un altro zero, ecc. Si vedrà dunque una macchia circolare, contornata da anelli sempre più deboli: possiamo prendere come confine della prima macchia il primo zero della funzione  $J_1$ , che dalle tavole risulta per  $u \simeq 3.83$ . Dunque il raggio della macchia è:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3.83}{k\bar{\rho}} = 3.83 \frac{\lambda}{2\pi} \frac{2l}{d} \\ &= 1.22 \frac{\lambda l}{d} = 1.22 n\lambda. \end{aligned}$$

Abbiamo così ritrovato la relazione già ampiamente discussa nel Cap. O1.

## Teoria ondulatoria delle aberrazioni

Quando la diffrazione è importante, anche la teoria geometrica delle aberrazioni è insufficiente, e va sostituita con una teoria ondulatoria. Questa può farsi senza difficoltà applicando il principio di H-F, con la sola modifica consistente nel sostituire alla superficie d'onda sferica quella aberrata. A tale scopo ripartiamo dalla (O10.3): è facile vedere che l'espressione in parentesi a esponente è la differenza di cammino ottico  $W(QP) - W(OP)$  fra raggio marginale e raggio

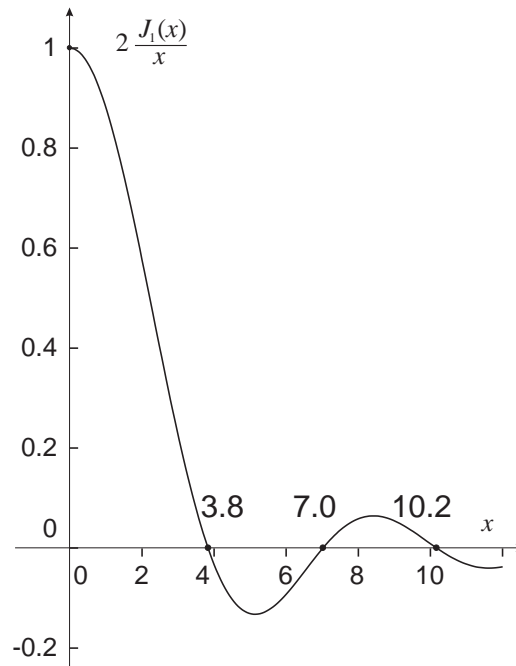


Fig. O10-4

principale, dovuta al fatto che P non è l'immagine gaussiana della sorgente. Nel caso generale (aberrato) dovremo dunque scrivere:

$$E(P) = \text{cost.} \int_0^{\bar{\varrho}} \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-ik\Phi} \quad (\text{O10.6})$$

dove  $\Phi$  è la differenza di cammino ottico dovuta anche alle aberrazioni. Riscriveremo la (O10.6) così:

$$E(P) = E_0(F) \frac{1}{\pi \bar{\varrho}^2} \int_0^{\bar{\varrho}} \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-ik\Phi} \quad (\text{O10.7})$$

dove  $E_0(F)$  è l'ampiezza in F in assenza di aberrazioni.

Poiché l'immagine gaussiana è in F, solo l'aberrazione sferica interviene; inoltre prenderemo P sull'asse ottico, e allora

$$\Phi = a\varrho^2 + b\varrho^4 \quad (\text{O10.8})$$

dove il primo termine è dovuto alla sfocatura  $x$  ( $a = -x/2$ ) e il secondo è l'aberrazione sferica. Prima d'introdurre l'espressione (O10.8), trasformiamo la (O10.7) sviluppando in serie di potenze l'esponenziale, il che sarà lecito se  $k\Phi \ll 1$  (d'altra parte in caso di aberrazioni forti, la diffrazione è poco importante e la teoria geometrica va bene).

$$e^{-ik\Phi} = 1 - ik\Phi - \frac{1}{2}k^2\Phi^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} E(P) &= E_0(F) \frac{1}{\pi \bar{\varrho}^2} \int_0^{\bar{\varrho}} \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi (1 - ik\Phi - \frac{1}{2}k^2\Phi^2 + \dots) \\ &= E_0(F) [1 - ik\langle\Phi\rangle - \frac{1}{2}k^2\langle\Phi^2\rangle + \dots]. \end{aligned}$$

dove  $\langle\dots\rangle$  sta a indicare il valor medio calcolato sull'area della p.u. Allora:

$$\begin{aligned} |E(P)|^2 &\simeq |E_0(F)|^2 \left[ \left(1 - \frac{1}{2}k^2\langle\Phi^2\rangle\right)^2 + k^2\langle\Phi\rangle^2 \right] \\ &\simeq |E_0(F)|^2 \left[ 1 - k^2 \left( \langle\Phi^2\rangle - \langle\Phi\rangle^2 \right) \right] \end{aligned}$$

avendo trascurato i termini in  $\Phi^4$ .

Il criterio di Strehl ci dice che è accettabile una riduzione d'intensità all'80%: dovrà dunque essere  $|E(P)|^2 > 0.8 |E_0(F)|^2$  cioè

$$k^2 \left( \langle\Phi^2\rangle - \langle\Phi\rangle^2 \right) < \frac{1}{5}.$$

Notiamo che  $\langle \Phi^2 \rangle - \langle \Phi \rangle^2$  è il quadrato dello scarto quadratico medio (s.q.m.) del cammino ottico: lo indicheremo con  $\sigma^2(\Phi)$ . Dunque il criterio di Strehl richiede

$$\sigma^2(\Phi) < \frac{1}{5k^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma < \frac{\lambda}{14}.$$

Calcolando  $\sigma^2(\Phi)$  dalla (O10.8) si trova:

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\pi \bar{\varrho}^2} \int_0^{\bar{\varrho}} \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi (a\varrho^2 + b\varrho^4) = \frac{1}{2} a \bar{\varrho}^2 + \frac{1}{3} b \bar{\varrho}^4$$

$$\langle \Phi^2 \rangle = \frac{1}{\pi \bar{\varrho}^2} \int_0^{\bar{\varrho}} \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi (a\varrho^2 + b\varrho^4)^2 = \frac{1}{3} a^2 \bar{\varrho}^4 + \frac{1}{2} ab \bar{\varrho}^6 + \frac{1}{5} b^2 \bar{\varrho}^8$$

$$\sigma^2(\Phi) = \langle \Phi^2 \rangle - \langle \Phi \rangle^2 = \frac{1}{12} a^2 \bar{\varrho}^4 + \frac{1}{6} ab \bar{\varrho}^6 + \frac{4}{45} b^2 \bar{\varrho}^8.$$

Nel fuoco parassiale ( $a = 0$ ) si ha:

$$\sigma_{\text{par}}^2(\Phi) = \frac{4}{45} b^2 \bar{\varrho}^8.$$

Ma  $\sigma^2$  può essere ridotto spostandosi dal piano focale: basta cercare il valore di  $a$  che rende minimo  $\sigma^2$ . Si trova  $a = -b\bar{\varrho}^2$  e il corrispondente

$$\sigma_{\text{opt}}^2(\Phi) = \frac{1}{180} b^2 \bar{\varrho}^8$$

e si è guadagnato un fattore 16.

Applichiamo questi risultati a uno specchio sferico: è solo una questione geometrica verificare che in tal caso  $b = -f/32$ . Usando  $\bar{\varrho} = 1/2n$  si ottiene

$$\sigma_{\text{opt}} = \frac{1}{3072 \sqrt{5}} \frac{f}{n^4}$$

e il criterio di Strehl dà:

$$\frac{f}{n^4} < 0.27 \text{ mm} \quad (\text{si è posto al solito } \lambda = 0.55 \mu\text{m}).$$

Si noti la dipendenza da  $n^4$ : la tollerabilità dell'aberrazione sferica dipende moltissimo dall'apertura relativa.

Aggiungiamo che ripetendo il calcolo col criterio di Rayleigh si ottiene la stessa formula, con una diversa costante (0.41 mm) che influisce poco sui limiti per  $n$ .

Per le altre aberrazioni si può seguire un metodo analogo, solo che i calcoli sono più complicati. Ecco i risultati (criterio di Strehl):

$$\begin{array}{ll} \textit{coma} & fu/n^3 < 1.06 \cdot 10^{-2} \text{ mm} \\ \textit{astigmatismo} & fu^2/n^2 < 1.53 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \end{array}$$

( $u$  è il "semiangolo di campo," cioè la vergenza dei raggi provenienti dalla sorgente più lontana dall'asse).