

M4. Perturbazioni: effetto di un primario non sferico.

Incominceremo lo studio delle perturbazioni in meccanica celeste esaminando l'effetto, sul moto di un satellite, di un primario con distribuzione di massa non sferica. Il potenziale newtoniano in questo caso non va più bene; di conseguenza il moto non sarà più kepleriano.

Sviluppo in multipoli dell'energia potenziale

La formula generale dell'energia potenziale è

$$V(\vec{r}) = -Gm \int \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d\vec{r}'. \quad (\text{M4.1})$$

Il denominatore è sviluppabile in serie di r'/r

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \omega) \quad (\text{M4.2})$$

dove ω è l'angolo tra \vec{r} e \vec{r}' . La serie converge per $r > r'$, e per $r \gg r'$ basta prendere in considerazione solo i primi termini. È ovvio che i coefficienti dello sviluppo dipendono solo da ω ; molto meno ovvio che si tratti addirittura di polinomi in $\cos \omega$, che si chiamano *polinomi di Legendre*. Si può dimostrare che è sempre $|P_l(\cos \omega)| \leq 1$; inoltre, se i vettori \vec{r} e \vec{r}' hanno rispettivamente gli angoli polari ϑ , λ e ϑ' , λ' , in modo che sia

$$\cos \omega = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\lambda - \lambda')$$

(teorema del coseno per il triangolo sferico formato da \vec{r} , \vec{r}' e l'asse z) si ha il *teorema di addizione*

$$P_l(\cos \omega) = \sum_{m=0}^l \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \vartheta) P_l^m(\cos \vartheta') \cos m(\lambda - \lambda') \quad (\text{M4.3})$$

dove

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & (m = 0) \\ 2 & (m > 0). \end{cases}$$

I polinomi “associati” che compaiono nella (M4.3) sono definiti da:

$$P_l^m(z) = (1-z^2)^{-m/2} \frac{d^m}{dz^m} \left[(1-z^2)^{m/2} P_l(z) \right]$$

e, nel caso particolare $m = 0$, da $P_l^0(z) = P_l(z)$.

Sostituendo l'espressione (M4.3) nella (M4.2) e questa nella (M4.1), e scrivendo l'integrale in coordinate polari, avremo in generale

$$V(\vec{r}) = -\frac{Gm}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \vartheta) \cdot \int \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l^m(\cos \vartheta') \cos m(\lambda - \lambda') \varrho(r', \vartheta', \lambda') r'^2 \sin \vartheta' dr' d\vartheta' d\lambda'. \quad (\text{M4.4})$$

Simmetria cilindrica

A questo punto conviene fare un'ipotesi semplificativa abbastanza naturale: che la distribuzione di massa del pianeta abbia *simmetria cilindrica*. Scegliendo allora l'asse z come asse di simmetria la $\varrho(\vec{r}')$ non dipenderà da λ' . In quest'ipotesi nella (M4.4) avremo da calcolare

$$\int_0^{2\pi} \cos m(\lambda - \lambda') d\lambda'$$

che dà sempre 0, a meno che non sia $m = 0$. La somma in m si riduce quindi al solo termine con $m = 0$ e abbiamo:

$$V(\vec{r}) = -\frac{Gm}{r} \sum_l P_l(\cos \vartheta) \int \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \vartheta') \varrho(r', \vartheta', \lambda') r'^2 \sin \vartheta' dr' d\vartheta' d\lambda'.$$

Sviluppiamo la somma per i primi termini, tenendo presenti le espressioni dei polinomi di Legendre

$$P_0(\cos \vartheta) = 1 \quad P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta \quad P_2(\cos \vartheta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$$

e avremo:

$$V(\vec{r}) = -\frac{Gm}{r} \left[\int \varrho(\vec{r}') d\vec{r}' + \cos \vartheta \int \frac{r'}{r} \cos \vartheta' \varrho(\vec{r}') d\vec{r}' + \frac{1}{2} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \int \frac{r'^2}{r^2} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \vartheta' - 1) \varrho(\vec{r}') d\vec{r}' + \dots \right]. \quad (\text{M4.5})$$

Notiamo adesso che $\int \varrho d\vec{r}' = M$ (massa totale del pianeta); poi

$$\int r' \cos \vartheta' \varrho(\vec{r}') d\vec{r}' = \int z' \varrho(\vec{r}') d\vec{r}' = M Z_G$$

per la definizione di centro di massa. Data l'arbitrarietà dell'origine delle coordinate si può sempre porre $Z_G = 0$, col risultato di far sparire il secondo termine, detto di *dipolo*.

Il potenziale di quadrupolo

Il terzo termine della (M4.5) può essere scritto

$$\frac{1}{4r^2} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \int (3z'^2 - r'^2) \varrho(\vec{r}') d\vec{r}' =$$

$$\frac{1}{4r^2} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \int \left[(x'^2 + z'^2) + (y'^2 + z'^2) - 2(x'^2 + y'^2) \right] \varrho(\vec{r}') d\vec{r}'$$

ma qui compaiono i momenti d'inerzia relativi ai tre assi; precisamente

$$\mathcal{I}_x = \int (y'^2 + z'^2) \varrho d\vec{r}' \quad \mathcal{I}_y = \int (x'^2 + z'^2) \varrho d\vec{r}' \quad \mathcal{I}_z = \int (x'^2 + y'^2) \varrho d\vec{r}'.$$

Questi di solito si scrivono $\mathcal{I}_x = \mathcal{I}_y = A$ e $\mathcal{I}_z = C$ (per la simmetria cilindrica i primi due coincidono necessariamente). In definitiva si ottiene:

$$V(\vec{r}) = -\frac{Gm}{r} \left[M + \frac{1}{2r^2} (3 \cos^2 \vartheta - 1) (A - C) + \dots \right] \quad (\text{M4.6})$$

Il termine addizionale rispetto al potenziale $1/r$ è detto *potenziale di quadrupolo* e va come $1/r^3$; esso è proporzionale alla differenza dei momenti d'inerzia. La (M4.6) si scrive di solito così:

$$V(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r} \left[1 + \frac{3R^2}{2r^2} \mathcal{J}_2 \left(\frac{1}{3} - \cos^2 \vartheta \right) + \dots \right]. \quad (\text{M4.7})$$

Nella (M4.7) oltre alla costante $GMm = k^2 \mu$ compare il numero puro

$$\mathcal{J}_2 = \frac{C - A}{MR^2}$$

che è una costante del pianeta in considerazione: nel caso della Terra si ha $\mathcal{J}_2 = 1.08263 \cdot 10^{-3}$.

La (M4.7) si presta a una valutazione dell'ordine di grandezza della perturbazione. Ad esempio nel caso della Luna, tenendo conto che

$$\left(\frac{1}{3} - \cos^2 \vartheta \right) \sim 1 \quad \mathcal{J}_2 \simeq 10^{-3} \quad \frac{R^2}{r^2} \simeq \left(\frac{1}{60} \right)^2 \simeq 3 \cdot 10^{-4}$$

si ha una perturbazione che vale $3 \cdot 10^{-7}$ del termine newtoniano; essa produce tra l'altro, come vedremo, un avanzamento o retrogradazione dei nodi, con una velocità angolare che sarà $3 \cdot 10^{-7}$ del moto orbitale della Luna. Ciò significa che il periodo sarà di circa 10^8 giorni $\simeq 3 \cdot 10^5$ anni. L'effetto è molto piccolo, anche se rilevabile con buoni strumenti.

Va detto però che nel caso della Luna vi sono perturbazioni ben più importanti, aventi tutt'altra causa, che vedremo in seguito.

Prima analisi del moto perturbato

Riprendiamo l'espressione (M4.7) dell'energia potenziale, che può scriversi così:

$$V = -\frac{k^2 \mu}{r} + V'$$

dove abbiamo separato la perturbazione V' dal termine newtoniano. Passando poi a coordinate cartesiane:

$$V' = -\frac{3Q}{r^5} \left(\frac{1}{3} - \cos^2 \vartheta\right) = -\frac{Q}{r^5} (x^2 + y^2 - 2z^2)$$

dove

$$Q = \frac{1}{2} k^2 \mu R^2 J_2.$$

Ne risultano le componenti della forza perturbatrice:

$$f_x = 3Q r^{-4} (5 \cos^2 \vartheta - 1) \sin \vartheta \cos \lambda$$

$$f_y = 3Q r^{-4} (5 \cos^2 \vartheta - 1) \sin \vartheta \sin \lambda$$

$$f_z = 3Q r^{-4} (5 \cos^2 \vartheta - 3) \cos \vartheta.$$

Si vede che \vec{f} passa sempre per l'asse z , e in un piano meridiano ha la distribuzione in fig. M4-1.

Dunque J_z resta costante del moto. Se la linea dei nodi è normale al foglio, si vede che la componente di \vec{J} nella direzione di Ω (che è zero all'istante considerato) decresce; dunque Ω ruota in senso *retrogrado*. Se l'orbita è circolare è anche chiaro che la perturbazione della rimanente componente di \vec{J} su metà dell'orbita compensa quella sull'altra metà (vedremo che la cosa è vera più in generale). Pertanto il modulo di \vec{J} non varia in media su un periodo, e lo stesso accade anche per i e per e ; ci saranno però perturbazioni periodiche.

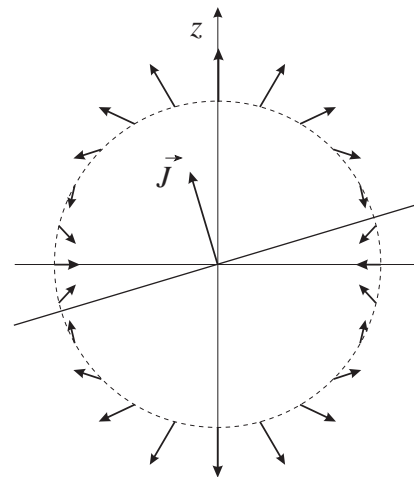


Fig. M4-1

M4-4

Consideriamo ora una generica orbita ellittica, ma con $i = 0$. Le equazioni del moto danno gli integrali primi:

$$\mu r^2 \dot{\lambda} = J \quad (\text{M4.8})$$

$$\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 - \frac{k^2\mu}{r} + \frac{J^2}{2\mu r^2} + V' = E. \quad (\text{M4.9})$$

Dalla (M4.9) si ottengono le distanze r_{\min} e r_{\max} al pericentro e all'apocentro, ponendo $\dot{r} = 0$:

$$-\frac{k^2\mu}{r} + \frac{J^2}{2\mu r^2} + V' = E.$$

Questa ha due radici reali, come nel caso imperturbato, se V' è piccolo. Si ha poi

$$t = \int \frac{dr}{\dot{r}} = \int dr \left(\frac{2E}{\mu} - \frac{2V'}{\mu} - \frac{J^2}{\mu^2 r^2} + \frac{2k^2}{r} \right)^{-1/2}$$

Il moto radiale è periodico, con periodo

$$T_r = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \left(\frac{2E}{\mu} - \frac{2V'}{\mu} - \frac{J^2}{\mu^2 r^2} + \frac{2k^2}{r} \right)^{-1/2}$$

ed è anche simmetrico: la fase di avvicinamento ripete in senso inverso quella di allontanamento.

Dalla (M4.8) si ottiene invece:

$$\lambda = \int \frac{J}{\mu r^2} dt = \frac{J}{\mu} \int \frac{dr}{r^2} \left(\frac{2E}{\mu} - \frac{2V'}{\mu} - \frac{J^2}{\mu^2 r^2} + \frac{2k^2}{r} \right)^{-1/2}$$

Poniamo

$$\Delta = \frac{J}{\mu} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2} \left(\frac{2E}{\mu} - \frac{2V'}{\mu} - \frac{J^2}{\mu^2 r^2} + \frac{2k^2}{r} \right)^{-1/2}$$

Nel moto imperturbato $\Delta = \pi$, quali che siano E e J ; per questo il moto imperturbato è periodico. Se $\Delta \neq \pi$, nel tempo T_r il satellite descrive un angolo $2\Delta \neq 2\pi$; per fare un giro impiegherà in media un tempo

$$T_\lambda = \frac{\pi}{\Delta} T_r \neq T_r.$$

Perciò la traiettoria non è più ellittica, ma assume la forma “a rosetta.”

Il metodo di Newton

È possibile ottenere informazioni più dettagliate seguendo il procedimento originario di Newton. Consideriamo le equazioni del moto in coordinate polari, per una forza centrale f qualsiasi:

$$\mu (\ddot{r} - r \dot{\lambda}^2) = f \quad (\text{M4.10})$$

$$\mu (r \ddot{\lambda} + 2\dot{r} \dot{\lambda}) = 0. \quad (\text{M4.11})$$

Dalla (M4.11) si ricava $\mu r^2 \dot{\lambda} = J = \text{cost.}$ Eliminando $\dot{\lambda}$ la (M4.10) diventa:

$$\mu \ddot{r} = f + \frac{J^2}{\mu r^3}. \quad (\text{M4.12})$$

Supponiamo che il moto sotto l'azione della forza f sia noto, e introduciamo una perturbazione c/r^3 : la (M4.12) si scriverà:

$$\mu \ddot{r} = f + \frac{c}{r^3} + \frac{J^2}{\mu r^3} = f + \frac{J'^2}{\mu r^3}$$

con

$$J'^2 = J^2 + \mu c.$$

Dunque l'equazione radiale perturbata è la stessa di quella imperturbata, ma con diverso valore di J . Detto λ' l'angolo del moto imperturbato con momento angolare J' , avremo

$$\mu r^2 \dot{\lambda}' = J'$$

cioè

$$\frac{\dot{\lambda}}{\dot{\lambda}'} = \frac{J}{J'}.$$

Otteniamo perciò:

- 1) il moto radiale perturbato con momento angolare J è lo stesso di quello imperturbato con momento angolare J' ;
- 2) il moto angolare perturbato ha velocità proporzionale a quella del moto imperturbato con momento angolare J' , col fattore di proporzionalità $J/J' \gtrless 1$ a seconda che la perturbazione sia attrattiva ($c < 0$) o repulsiva ($c > 0$);
- 3) in particolare

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{J}{J'}.$$

Ne segue che se il moto imperturbato è kepleriano ($\Delta' = \pi$) avremo uno spostamento del pericentro

$$2\Delta - 2\pi = 2\pi \left(\frac{J}{J'} - 1 \right) = 2\pi \left[\left(1 + \frac{\mu c}{J^2} \right)^{-1/2} - 1 \right]. \quad (\text{M4.13})$$

Il procedimento fino a questo punto è esatto per qualunque orbita, se la forza perturbativa va come $1/r^3$. Newton considera anche il caso di una forza generica, nell'approssimazione di orbita *quasi circolare*. Appliciamolo al nostro problema, dove la forza (per $\vartheta = \pi/2$) è $-3Q/r^4$.

Si verifica che al primo ordine in $r - a$ (a semiasse maggiore):

$$-\frac{3Q}{r^4} \simeq \frac{3Q}{a^2 r^2} - \frac{6Q}{a r^3}.$$

Dunque su un'orbita quasi circolare la nostra perturbazione equivale a una forza newtoniana (che mantiene l'orbita chiusa) più la perturbazione $-6Q/(a r^3)$. Abbiamo allora dalla (M4.13), per l'avanzamento del pericentro ad ogni giro:

$$2\pi \left[\left(1 - \frac{6\mu Q}{a J^2} \right)^{-1/2} - 1 \right] \simeq 2\pi \frac{3\mu Q}{a J^2} = 2\pi \frac{3k^2 \mu^2 R^2 \mathcal{J}_2}{2a J^2} = 2\pi \frac{3R^2}{2a^2} \mathcal{J}_2.$$

Si può quindi parlare di un *moto medio del pericentro*:

$$\frac{3}{2} n \frac{R^2}{a^2} \mathcal{J}_2.$$

Ritroveremo più avanti lo stesso risultato dalla teoria generale.

La precessione lunisolare

Concludiamo questo capitolo con un argomento estraneo, ma che ha in comune con quello che procede la sua origine nello schiacciamento della Terra: si tratta della *precessione*, più volte citata.

Vogliamo studiare l'effetto dell'attrazione del Sole (e della Luna) sul moto di rotazione della Terra. Sia dm un elemento di massa della Terra; M la massa del Sole, R la sua distanza dal centro della Terra (fig. M4-2). L'attrazione del Sole su dm sarà:

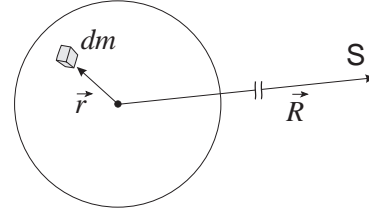


Fig. M4-2

$$d\vec{F} = GM dm \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \simeq \frac{GM dm}{R^3} (\vec{R} - \vec{r}) \left(1 + \frac{3\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \right)$$

(al primo ordine in r/R). Il momento $d\vec{K}$ rispetto al centro di massa T della Terra è

$$d\vec{K} = \vec{r} \times d\vec{F} = \frac{GM dm}{R^3} \left(1 + \frac{3\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \right) \vec{r} \times \vec{R} \quad (\text{M4.14})$$

M4-7

e il momento risultante sull'intera Terra si ottiene integrando la (M4.14). Il termine 1 in parentesi non contribuisce. Assumendo una terna cartesiana equatoriale, e tenendo presente la simmetria della Terra attorno all'asse polare, si ottiene:

$$\begin{aligned} K_x &= \frac{3GM}{R^5} YZ (C - A) \\ K_y &= \frac{3GM}{R^5} XZ (A - C) \\ K_z &= 0 \end{aligned}$$

dove X, Y, Z sono le componenti di \vec{R} ; C è il momento d'inerzia della Terra rispetto all'asse polare; A quello rispetto a un asse equatoriale (la Terra è schiacciata: $C > A$).

Passando a coordinate cartesiane eclittiche (ξ, η, ζ) (con ξ in direzione del punto γ), si trova

$$\begin{aligned} K_\xi &= \frac{3GM}{R^3} (C - A) \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin^2 \lambda \\ K_\eta &= \frac{3GM}{R^3} (A - C) \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin \lambda \cos \lambda \\ K_\zeta &= \frac{3GM}{R^3} (C - A) \sin^2 \varepsilon \sin \lambda \cos \lambda \end{aligned} \quad (\text{M4.15})$$

dove λ è la longitudine eclittica del Sole, ε l'obliquità dell'eclittica.

Dato che il moto di precessione è lento, possiamo considerare le medie delle (M4.15) su un anno, supponendo il moto del Sole uniforme. Risulta allora:

$$\begin{aligned} \bar{K}_\xi &= \frac{3GM}{2R^3} (C - A) \sin \varepsilon \cos \varepsilon \\ \bar{K}_\eta &= \bar{K}_\zeta = 0. \end{aligned} \quad (\text{M4.16})$$

Il modulo del momento angolare della Terra vale $C n_0$, dove n_0 è la velocità angolare; la sua proiezione sul piano dell'eclittica è diretta secondo η , e vale $C n_0 \sin \varepsilon$. Tenuto presente che $d\vec{J}/dt = \vec{K}$, dalla fig. M4-3 si vede che la variazione di \vec{J} avviene nel verso osservato; la velocità di precessione dovuta al Sole sarà, per la prima delle (M4.16)

$$p_\odot = \frac{\bar{K}_\xi}{C n_0 \sin \varepsilon} = \frac{3GM}{2R^3} \frac{C - A}{C n_0} \cos \varepsilon.$$

Un effetto analogo è dovuto alla Luna (che si può con buona approssimazione supporre sull'eclittica).

Si vede che p_ζ è circa il doppio di p_\odot . Il totale $p = p_\odot + p_\zeta$ dà l'effetto osservato di $50''.3$ per anno.

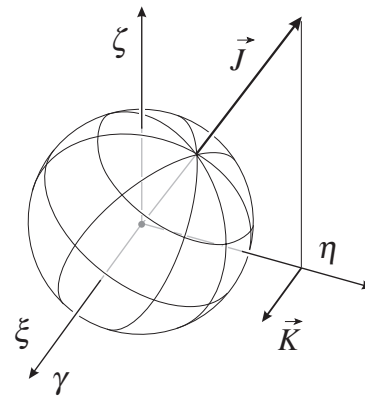


Fig. M4-3