OLIMPIADI DI FISICA 1994

Gara Nazionale — SOLUZIONI

17 Aprile 1994

PROBLEMA n. 1 – Energia di dissociazione dell'ozono

Quesito n. 1.

Nei due scomparti sono presenti

$$n_1 = \frac{32\,\mathrm{g}}{32\,\mathrm{g\,mol^{-1}}} = 1\,\mathrm{mol} \quad \text{di ossigeno e}$$

$$n_2 = \frac{4\,\mathrm{g}}{48\,\mathrm{g\,mol^{-1}}} = \frac{1}{12}\,\mathrm{mol} \quad \text{di ozono.}$$

La temperatura è

$$T_0 = \frac{p_{\mathrm{O_2}}\,V_{\mathrm{O_2}}}{n_1\,R} = \frac{(1.015 \times 10^5\,\mathrm{N\,m^{-2}})(0.0230\,\mathrm{m^3})}{(1\,\mathrm{mol})(8.31\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}})} = 281\ \mathrm{K}$$

Il volume del secondo scomparto è

$$V_{\mathrm{O_3}} = \frac{n_2 R T_0}{p_{\mathrm{O_3}}} = \frac{n_2\,p_{\mathrm{O_2}}}{n_1\,p_{\mathrm{O_3}}}\,V_{\mathrm{O_2}} = 2\,\mathrm{dm^3}$$

Messi in comunicazione i due scomparti, il volume della miscela è

$$V = V_{\mathrm{O_2}} + V_{\mathrm{O_3}} = \frac{n_1\,p_{\mathrm{O_3}} + n_2\,p_{\mathrm{O_2}}}{n_1\,p_{\mathrm{O_3}}} V_{\mathrm{O_2}} = 25\,\mathrm{dm^3}$$

Per la legge di Dalton la pressione della miscela di gas è uguale alla somma delle pressioni parziali:

$$p_0 = p_1 + p_2 = \frac{(n_1 + n_2)\,RT_0}{V} = \frac{(n_1 + n_2)\,p_{\mathrm{O_3}}\,p_{\mathrm{O_2}}}{n_1\,p_{\mathrm{O_3}} + n_2\,p_{\mathrm{O_2}}} = 1.012 \times 10^5\,\mathrm{N\,m^{-2}}$$

Quesito n. 2.

L'energia del sistema gassoso, a meno di una costante arbitraria, all'inizio del processo è

$$U_0 = n(C_v)_{O_2} T_0 + \frac{1}{12} n(C_v)_{O_3} T_0 = \frac{67}{24} RT_0 = \frac{67}{26} p_0 V_0$$

dove $n = 1\,\mathrm{mol}$ e T_0 è la temperatura iniziale all'interno del cilindro; si è tenuto conto che $(C_v)_{O_2} = 5/2\,R$ e $(C_v)_{O_3} = 7/2\,R$.

Alla fine del processo, dopo la reazione $2O_3 \to 3O_2$, a temperatura T_1, l'energia interna è:

$$U_1 = \left(1 + \frac{3}{2}\frac{1}{12}\right) n(C_v)_{O_2} T_1 = \frac{45}{16} RT_1$$

La temperatura iniziale è nota, mentre resta da esprimere in termini di grandezze note la temperatura finale T_1. L'equazione dei gas ideali comporta, nella situazione finale

$$T_1 = \frac{8}{9}\frac{p_0 V_1}{R} = 631 \text{ K} \quad \Rightarrow \quad U_1 = \frac{5}{2} p_0 V_1$$

Poiché il volume è aumentato, il lavoro fatto dal sistema è

$$W = p_0(V_1 - V_0) \quad \text{con} \quad V_1 = V_0 + \Delta V = (25 + 33.6)\,\mathrm{dm}^3 = 58.6\,\mathrm{dm}^3.$$

L'energia sviluppata (o assorbita) nella reazione è

$$Q = U_1 - U_0 + W$$

La reazione quindi è esotermica e l'energia sviluppata nlla reazione è

$$Q = \frac{45}{16} RT_1 - \frac{67}{44} RT_0 + p_0(V_1 - V_0) = p_0 \left(\frac{7}{2} V_1 - \frac{93}{26} V_0\right) = 1.170 \times 10^4 \text{ J}$$

e quindi $1.40 \times 10^5\,\mathrm{J\,mol^{-1}}$.

Quesito n. 3.

Poiché l'ossigeno atomico si ricombina in O_2, per ogni molecola di ozono che si dissocia, viene sviluppata l'energia di ricombinazione $\epsilon_D/2$.

Indicando con x l'energia sviluppata nella dissociazione di una molecola di ozono, si può scrivere

$$Q = \frac{1}{12} N_A \left(\frac{\epsilon_D}{2} + x\right)$$

e quindi

$$x = \frac{12Q}{N_A} - \frac{\epsilon_D}{2}.$$

Tenedo conto della precedente espressione per Q

$$x = \frac{12}{N_A} p_0 \left(\frac{7}{2} V_1 - \frac{93}{26} V_0\right) - \frac{\epsilon_D}{2} = -1.74 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

Dunque la dissociazione dell'ozono è endotermica, avviene cioè con assorbimento di energia.

PROBLEMA n. 2 – Trascinamento per attrito

Riferiremo il moto del blocco rispetto al terreno.

Quesito n. 1.

Il blocco è soggetto ad una forza orizzontale $F_\mathrm{a} = mg\mu_\mathrm{d}$. Lo spostamento x_0 del blocco cessa quando il lavoro fatto da F_a uguaglia l'energia potenziale immagazzinata nella molla:

$$mg\mu_\mathrm{d}x_0 = \frac{1}{2}kx_0^2 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{2mg\mu_\mathrm{d}}{k} = 0.42\,\mathrm{m}$$

Quesito n. 2.

Se la velocità del nastro è tale che si ha sempre condizione di strisciamento, la forza F_a che agisce sul blocco, dovuta all'attrito dinamico, sarà una forza costante e soprattutto sarà diretta sempre nello stesso verso (quello del moto della striscia). La situazione è perciò indistinguibile da quella di una massa sospesa ad una molla sotto l'azione della forza gravitazionale (che in questo caso è rappresentata dalla forza F_a). Il moto sarà perciò armonico intorno al punto M, di equilibrio statico della massa. La posizione di tale punto è

$$x_\mathrm{M} = \frac{mg\mu_\mathrm{d}}{k}$$

Il periodo è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 1.69\,\mathrm{s}$$

e l'ampiezza, visto che la posizione iniziale è $x = 0$, sarà

$$A = \frac{mg\mu_\mathrm{d}}{k} = 0.21\,\mathrm{m}.$$

ALTERNATIVA, più formale

La forza totale agente sul blocco, per un generico spostamento x dalla posizione iniziale, è

$$F = F_\mathrm{a} - kx = mg\mu_\mathrm{d} - kx$$

per cui

$$ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg\mu_\mathrm{d} = -k\left(x - \frac{mg\mu_\mathrm{d}}{k}\right)$$

Questa relazione è caratteristica dei moti armonici, con posizione di equilibrio a distanza $x_\mathrm{M} = mg\mu_\mathrm{d}/k$ dalla posizione iniziale, come avevamo già detto.

Quesito n. 3.

Lo strisciamento deve cessare quando il blocco si trova fermo rispetto al nastro: questa situazione non può certamente verificarsi quando il blocco si muove verso la posizione iniziale e quindi con velocità di segno opposto a quella del nastro. Potrebbe invece verificarsi nella fase in cui il corpo si muove nello stesso verso del nastro ed alla stessa velocità. Ma la velocità del corpo, nel moto armonico, varia da 0 ad un valore massimo $v_{\max} = A\omega$ dove A è l'ampiezza ed ω la pulsazione del moto.

Per mantenere la condizione di strisciamento basterà allora che la velocità del nastro sia superiore a $v_{\max}$.

Abbiamo:

$$v_{\max} = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}} = g\mu_{\mathrm{d}}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Con i dati numerici, $v_{\max} = 0.79\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, mentre $v = 1.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Lo strisciamento quindi non può cessare.

Quesito n. 4.

Fin quando il blocco striscia sul nastro, si muove di moto armonico come abbiamo visto. Appena raggiunge una velocità uguale a quella del nastro (e nello stesso verso) lo strisciamento cessa; indichiamo con P il punto in cui ciò avviene. L'attrito diventa ora statico con coefficiente μ_{s} ed il nastro trasporta il blocco facendo allungare la molla. La situazione si mantiene fino a quando la forza esercitata dalla molla supera la forza di attrito statico, provocando il distacco del blocco e l'inizio di una nuova fase di scivolamento; indichiamo con Q il punto in cui ciò accade. Al momento del distacco, il blocco *continua a muoversi con velocità v* nello stesso senso del nastro e si trova in condizioni analoghe (strisciamento) a quelle della domanda 2). Riprende perciò un moto armonico intorno alla stessa posizione di equilibrio M e con lo stesso periodo. Questa fase termina quando il blocco riacquista, in P, la stessa velocità del nastro e vi aderisce di nuovo. I punti P e Q sono perciò simmetrici rispetto ad M, (stessa velocità nel moto armonico). Il moto sarà quindi composto di una fase a velocità costante (v) che si raccorda ad una fase di oscillazione armonica. Il grafico può essere del tipo di quello riportato in figura.

I punti significativi sono perciò P, Q, M già definiti e le posizioni estreme R, S.

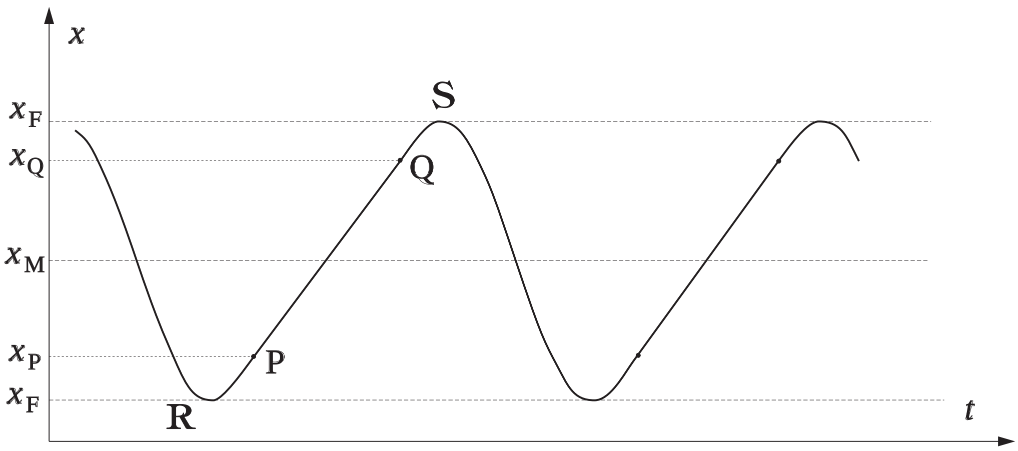
Quesito n. 5.

Il punto Q è tale che

$$kx_{\mathrm{Q}} = \mu_{\mathrm{s}} mg \qquad \Rightarrow \qquad x_{\mathrm{Q}} = \frac{\mu_{\mathrm{s}} mg}{k} = 0.35\,\mathrm{m}$$

Il punto P è il simmetrico di Q rispetto ad M.

Subito dopo il distacco il blocco continua a muoversi nel verso del nastro fino a quando il lavoro fatto dalla forza di attrito, aggiungendosi all'energia cinetica posseduta al momento del distacco, uguaglia l'aumento di energia potenziale della molla. Indicando con x_{F} la posizione di un punto di arresto:



$$\mu_\mathrm{d} mg\,(x_\mathrm{F} - x_\mathrm{Q}) + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(x_\mathrm{F}^2 - x_\mathrm{Q}^2)$$

da cui

$$\frac{1}{2}kx_\mathrm{F}^2 - \mu_\mathrm{d} mgx_\mathrm{F} + \left(\mu_\mathrm{d} mgx_\mathrm{Q} - \frac{1}{2}kx_\mathrm{Q}^2 - \frac{1}{2}mv^2\right) = 0$$

e, tenendo conto dell'espressione di x_Q,

$$\frac{1}{2}kx_\mathrm{F}^2 - \mu_\mathrm{d} mgx_\mathrm{F} + \left(\frac{\mu_\mathrm{d}\mu_\mathrm{s} m^2g^2}{k} - \frac{\mu_\mathrm{s}^2 m^2 g^2}{2k} - \frac{1}{2}mv^2\right) = 0$$

Risolvendo l'equazione in x_F:

$$x_\mathrm{F} = \frac{\mu_\mathrm{d} mg}{k} \pm \sqrt{\frac{(\mu_\mathrm{s} - \mu_\mathrm{d})^2 m^2 g^2}{k^2} + \frac{mv^2}{k}}$$

I due valori trovati rappresentano la posizione del blocco negli estremi R, S, dell'oscillazione, e confermano le previsioni fatte al punto 4).

L'ampiezza è quindi:

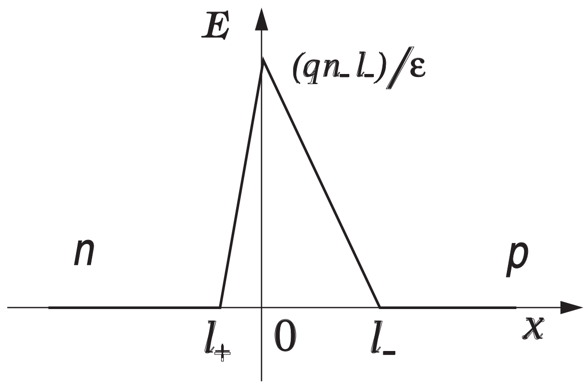
$$A_1 = \sqrt{\frac{(\mu_\mathrm{s} - \mu_\mathrm{d})^2 m^2 g^2}{k^2} + \frac{mv^2}{k}} = 0.19\,\mathrm{m}$$

PROBLEMA n. 3 – Giunzione n-p

Quesito n. 1.

Si ponga sulla giunzione l'origine di un sistema di riferimento e si indichi con ℓ_+ l'ampiezza della regione di svuotamento nella parte di tipo n della giunzione e con ℓ_- l'ampiezza nella parte di tipo p. Allora $\ell_+ + \ell_- = \ell_0$.

In situazione di stazionarietà la corrente elettrica che circola nel semiconduttore è nulla. In questa condizione è nullo anche il campo elettrico nella zona dove ci sono cariche libere, cioè esternamente alla regione di svuotamento.



Poiché la regione di svuotamento è caratterizzata dalla dimensione trasversale d molto maggiore rispetto all'ampiezza ℓ_0, si può assumere che al proprio interno il campo elettrico sia diretto parallelamente all'asse longitudinale del campione di semiconduttore.

Ponendo $E(-\ell_+) = E(\ell_-) = 0$ e applicando il teorema di Gauss si ottiene

$$E(x) = \frac{qn_+}{\varepsilon}(\ell_+ + x) = \frac{qn_-}{\varepsilon}\left(\ell_- + \frac{\ell_-}{\ell_+}x\right)$$

nella parte di tipo n della giunzione e

$$E(x) = \frac{qn_-}{\varepsilon}(\ell_- - x)$$

nella parte di tipo p della giunzione.

Quesito n. 2.

Assegnando $V_\mathrm{g}(\ell_-) = 0$, il potenziale elettrico a distanza x dalla giunzione si può determinare come l'area compresa tra la curva e l'asse delle ascisse nel grafico del campo elettrico in funzione della distanza. Si ricava

$$V_\mathrm{g}(x) = \frac{qn_-}{2\varepsilon}(\ell_- - x)^2$$

per valori positivi della x e

$$V_\mathrm{g}(x) = \frac{qn_-}{2\varepsilon}\ell_-^2 + \frac{qn_+}{2\varepsilon}\ell_+^2 - \frac{qn_+}{2\varepsilon}(\ell_+ + x)^2 = \frac{qn_-}{2\varepsilon}\ell_-^2 - \frac{qn_+}{2\varepsilon}(x^2 + 2\ell_+ x)$$

per valori negativi della x. La differenza di potenziale nella giunzione assumerà valore massimo per $x = -\ell_+$.

Considerando che il campione è complessivamente neutro e con i valori delle densità di carica del problema, si ha

$$\ell_+ = \ell_- \frac{n_-}{n_+} = 0.035\,\ell_- \ll \ell_-$$

Si può operare, quindi l'approssimazione

$$\ell_- \approx \ell_- + \ell_+ = \ell_0 = 0.5\,\mu\text{m} \quad \text{e} \quad \ell_+ \approx 0$$

In tale condizione il massimo valore della differenza di potenziale si avrà per $x = 0$

$$V_\text{g}(0) = \frac{qn_-}{2\varepsilon}\ell_0^2 = 0.56\,\text{V}$$

Quesito n. 3.

Quando il semiconduttore viene cortocircuitato si ha $V_\text{g}(0) - V_\text{o} = 0$; mentre nel caso in cui si applica una differenza di potenziale V_est agli estremi del campione la relazione precedente diventa $V'_\text{g}(0) - V_0 = V_\text{est}$. Se l'estremità di tipo p del semiconduttore è posta ad un potenziale più basso rispetto l'estremità di tipo n, dalla relazione precedente si ricava che $V'_\text{g}(0)$ aumenta rispetto a $V_\text{g}(0)$; in questo caso si dice che la giunzione è polarizzata inversamente. Viceversa invertendo il collegamento $V'_\text{g}(0)$ diminuisce e la giunzione si dice polarizzata direttamente.

Sostituendo nella relazione precedente l'espressione di $V'_\text{g}(0)$ in funzione di ℓ si ottiene

$$\ell = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{qn_-}}\sqrt{V_0 + V_\text{est}}$$

Lo spessore della giunzione aumenta quando essa è polarizzata inversamente e diminuisce quando è polarizzata direttamente.

Quesito n. 4.

La carica Q presente nella parte di tipo p della giunzione dipende dallo spessore ℓ'_- secondo la relazione $Q = qn_- d^2 \ell'_-$. Quindi $\Delta Q = qn_- d^2 \Delta\ell'_-$. Inoltre $\Delta V_\text{est} = \Delta V'_\text{g}(0) = \dfrac{qn_-}{2\varepsilon}\Delta(\ell'^2_-)$.

Poiché $\Delta(\ell'^2_-) = (\ell_- + \Delta\ell'_-)^2 - \ell_-^2 \approx 2\ell_-\Delta\ell'_-$; si ricava

$$\frac{\Delta\ell'_-}{\Delta(\ell'^2_-)} \approx \frac{\Delta\ell'_-}{2\ell_-\Delta\ell'_-} \approx \frac{1}{2\ell_0}.$$

In definitiva si ottiene

$$C_\text{T} = 2\varepsilon d^2 \frac{\Delta\ell'_-}{\Delta(\ell'^2_-)} = \frac{\varepsilon d^2}{\ell_0} = 8.5\,\text{pF}.$$

Notare che il valore della capacità elettrica di transizione non dipende direttamente dalla densità di carica elettrica.

PROBLEMA n. 4 – Miraggio

Quesito n. 1.

Suddividendo l'atmosfera in sottili strati orizzontali omogenei ed applicando ripetutamente la legge di rifrazione si ha

$n_\mathrm{i} \operatorname{sen} \alpha_\mathrm{i} = n_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = n_2 \operatorname{sen} \alpha_2 = \ldots = n_\mathrm{e} \operatorname{sen} \alpha_\mathrm{e}$ da cui

$$\operatorname{sen} \alpha_\mathrm{e} = \operatorname{sen} \alpha_\mathrm{i} \frac{n_\mathrm{i}}{n_\mathrm{e}}$$

Quesito n. 2.

La legge di stato dei gas perfetti, in termini di densità si scrive

$\dfrac{p}{\rho} = \dfrac{RT}{A}$ (essendo A il peso molecolare medio), per cui

$$n - 1 = k \frac{p A}{RT} \quad \Rightarrow \quad \frac{k p A}{R} = (n-1) T$$

Il coefficiente termico di variazione è

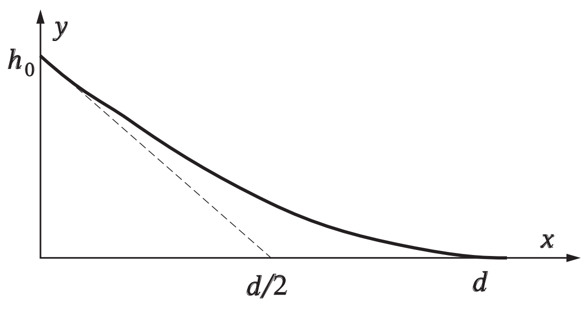
$$\nu = \frac{dn}{dT} = -\frac{k p A}{RT^2} = -\frac{n-1}{T} = -\frac{0.00027}{300} \approx -0.90 \times 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$$

Quesito n. 3.

Si consideri il raggio che proviene dal punto più lontano della parte visibile della strada: esso descrive una parabola tangente al piano della strada in un punto a distanza d dall'osservatore.

L'equazione della parabola è $y = a(d-x)^2$ e per la condizione $y(0) = h_0$ si ha

$$y(x) = \frac{h_0}{d^2} (d-x)^2$$



Il punto a distanza d appare invece al guidare in posizione d_0 tale che

$\dfrac{d_0}{h_0} = \operatorname{tg} \alpha$ essendo $\dfrac{1}{tg\alpha} = y'(0)$ per cui

$$y'(0) = 2\frac{h_0}{d^2}(d-x)\Big|_{x=0} = \frac{2h_0}{d} = \frac{h_0}{d_0} \quad \Rightarrow \quad d = 2d_0 = 400\,\mathrm{m}$$

Quesito n. 4.

Al suolo $\alpha_0 = \pi/2$ e dunque

$$n(h_0) = n_0 / \operatorname{sen}\alpha = n_0 \frac{\sqrt{d_0^2 + h_0^2}}{d_0}$$

che sfruttando la condizione $h_0 \ll d_0$ si può approssimare con

$$n(h_0) = n_0 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{h_0^2}{d_0^2}\right)$$

Quesito n. 5.

Combinando le relazioni

$$n(T) = n(T_0)\,(1 + \nu\,\Delta T) \quad \text{e} \quad T(h) = T(0) + \theta\,h$$

si ha, per $h = h_0$,

$$n(h_0) = n_0\,(1 + \nu\theta\,h_0)$$

Uguagliando questa espressione con quella trovata al punto 4. si ricava immediatamente

$$\frac{1}{2}\frac{h_0^2}{d_0^2} = \nu\theta\,h_0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{h_0}{2\nu\,d_0^2} = 19.4\,\mathrm{K\,m^{-1}}.$$

Materiale prodotto dal Gruppo

PROGETTO OLIMPIADI

c/o Liceo Scientifico G. Bruno

via Baglioni 26, 30173 Venezia Mestre

fax: 041–5840462