

## Temporaneo sulle due particelle correlate e due fenditure

### L'esperimento

ReBim ha proposto il seguente esperimento.

“Un cannone elettronico produce coppie di elettroni correlati rispetto alla direzione di propagazione. Nel senso che i due elettroni della coppia hanno opposta direzione di propagazione.

Inserisco ora, diametralmente rispetto alla sorgente di elettroni, due doppie fenditure, e, successivamente, due schermi. Si tratta cioè del famoso esperimento delle due fenditure duplicato specularmente (parte A e parte B), lavorando con oggetti correlati.

Presso la parte A un tecnico, attraverso l'uso di luce, individua in quale fenditura passa ogni elettrone. Quale sarà il risultato complessivo dell'esperimento? Penso che lo schermo A non presenterà figura di interferenza.

Ma che dire dello schermo B? Se gli elettroni sono correlati, ogni volta che l'elettrone in A sarà ridotto a passare in una determinata fenditura, lo stesso succederà in B. Dunque anche in B lo schermo non presenterà interferenza?

Ma se così è, come spiegherà l'assenza di interferenza un tecnico in B, che nulla potrebbe sapere di ciò che succede oltre il cannone?”

### Una schematizzazione

Ottimo: ora possiamo provare a dare una prima formalizzazione del tuo esperimento. Non mi preoccupo troppo di come si potrebbe concretamente realizzare: questo lo lasciamo agli sperimentali :-)

Proviamo questa:

$$|1, p\rangle |2, -p\rangle + |1, q\rangle |2, -q\rangle. \quad (1)$$

Ci sono *due* autovalori dell'impulso,  $p$  e  $q$  (nota che in generale saranno vettori: potrebbe servire); le due particelle hanno sempre autovalori opposti, quindi l'impulso totale è nullo. Ma l'impulso di ciascuna particelle di per sé *non è determinato*.

Questo è uno stato intrecciato.

Ora dobbiamo descrivere le fenditure. Per la particella 1, chiamo  $a, b$  le fenditure; per la particella 2 le chiamo  $c, d$ . Coerentemente, indico con  $|1, a\rangle$  lo stato della particella 1 se è passata dalla fenditura  $a$ , ecc.

## Cominciamo con la particella 1

Se avessi solo la particella 1, direi che l'ampiezza per la particella con impulso  $p$  che passa per  $a$  è  $\langle 1, a | 1, p \rangle$ . La rispettiva probabilità sarà  $|\langle 1, a | 1, p \rangle|^2$ .

Sia  $x$  la posizione di un punto sullo schermo: per fissare le idee,  $x$  è un'ascissa presa positiva nel verso da  $a$  a  $b$  e cono origine a metà strada tra le due fenditure. La probabilità che una particella nello stato  $|1, a\rangle$  arrivi in  $x$  sarà  $|\langle x | 1, a \rangle|^2$ . Sempre se avessi solo la particella 1 — per es. in uno stato  $|1, p\rangle$  — e le due fenditure, lo stato della particella dopo le fenditure sarebbe

$$|1, a\rangle \langle 1, a | 1, p \rangle + |1, b\rangle \langle 1, b | 1, p \rangle. \quad (2)$$

Nota che si tratta di una sovrapposizione di  $|1, a\rangle$  e  $|1, b\rangle$ , con opportuni coefficienti.

La probabilità di rivelare la particella in  $x$  sarebbe

$$\begin{aligned} W(x) = & \left( \langle 1, p | 1, a \rangle \langle 1, a | x \rangle + \langle 1, p | 1, b \rangle \langle 1, b | x \rangle \right) \times \\ & \left( \langle x | 1, a \rangle \langle 1, a | 1, p \rangle + \langle x | 1, b \rangle \langle 1, b | 1, p \rangle \right) = \\ & |\langle x | a \rangle|^2 |\langle a | p \rangle|^2 + |\langle x | b \rangle|^2 |\langle b | p \rangle|^2 + \\ & \langle p | a \rangle \langle a | x \rangle \langle x | b \rangle \langle b | p \rangle + \langle p | b \rangle \langle b | x \rangle \langle x | a \rangle \langle a | p \rangle \end{aligned} \quad (3)$$

(ho soppresso l'1 che al momento è superfluo).

I primi due termini sono risp. la probabilità che la particella atterri in  $x$  essendo passata per  $a$  oppure per  $b$ . Gli altri due sono i termini d'interferenza (che sia così, lo si potrebbe vedere dando un'espressione per  $\langle x | a \rangle$  e  $\langle x | b \rangle$ : si scoprirebbe che la somma dei due termini oscilla al variare di  $x$ , come ci si aspetta da brave frange d'interferenza).

Naturalmente se il tecnico ha messo qualcosa che gli permette di rivelare *dove* la particella è passata, la probabilità che arrivi in  $x$  sarà semplicemente data dalla prima riga, cioè la semplice somma delle due probabilità di rivelare la particella in  $x$  se è passata per  $a$ , e se è passata per  $b$ . Perché questo? Quale sarebbe in questo caso lo stato della particella dopo le fenditure? Non sarebbe più uno *stato puro* sovrapposizione di  $|1, a\rangle$  e  $|1, b\rangle$  con quei coefficienti, com'è scritto nella (2): sarebbe una *miscela statistica* (incoerente) dei due stati, coi pesi  $|\langle 1, a | 1, p \rangle|^2$  e  $|\langle 1, b | 1, p \rangle|^2$ .

Incidentalmente, per descrivere le miscele statistiche occorrerebbe arricchire il formalismo: si dovrebbe passare agli *operatori statistici* (spesso chiamati “matrici densità”). Qui vorrei evitarlo...

Un'osservazione ovvia è che tutto quanto precede si può ripetere a partire dallo stato  $|1, q\rangle$ : basta scrivere  $q$  al posto di  $p$  in tutte le formule.

## Semplificazione

Si può semplificare la notazione della (2) ecc. introducendo degli operatori:

$$\begin{aligned} T_a &\stackrel{\text{def}}{=} |1, a\rangle \langle 1, a| & T_b &\stackrel{\text{def}}{=} |1, b\rangle \langle 1, b| \\ T_1 &\stackrel{\text{def}}{=} T_a + T_b. \end{aligned} \tag{4}$$

Gli operatori  $T_a$ ,  $T_b$  sono i *proiettori* per gli stati  $|1, a\rangle$ ,  $|1, b\rangle$  risp., mentre  $T_1$  è anch'esso un proiettore, sul sottospazio generato da  $|1, a\rangle$ ,  $|1, b\rangle$ . (Che  $T_1$  sia un proiettore, discende dal fatto che  $|1, a\rangle$ ,  $|1, b\rangle$  sono tra loro *ortogonali*.)

Con queste posizioni il vettore (2) si può scrivere più semplicemente

$$T_1 |1, p\rangle. \tag{5}$$

La (5) ha l'aspetto di un'equazione di evoluzione dello stato: la particella 1, inizialmente prodotta nello stato (2), dopo attraversate le fenditure si trova nello stato (5).

C'è però un aspetto per il quale la (5) non è un'equazione di evoluzione:  $T_2$  *non è unitario*. Questo è ovvio, essendo il proiettore di un sottospazio proprio dell'intero spazio degli stati di 1. Fisicamente, ciò corrisponde al fatto che non tutte le particelle emesse dal cannone passeranno per le fenditure: anzi la gran parte verranno *assorbite* dal diaframma in cui sono ricavate le fenditure. Perciò una corretta equazione di evoluzione dovrebbe contenere un altro termine, relativo a questo assorbimento.

Tuttavia non c'è alcun problema a lavorare con  $T_1$  e quindi con la (5), perché le particelle assorbite non hanno effetto nell'esperimento: sono semplicemente eventi *nulli*, che non danno luogo ad alcun segnale nei rivelatori.

Anche la (3) può essere riscritta in modo più semplice:

$$\begin{aligned} W(x) &= \langle p | T_1 | x \rangle \langle x | T_1 | p \rangle = \\ &|\langle x | T_a | p \rangle|^2 + |\langle x | T_b | p \rangle|^2 + \\ &\langle x | T_a | p \rangle \langle p | T_b | x \rangle + \langle x | T_b | p \rangle \langle p | T_a | x \rangle \end{aligned} \tag{6}$$

(ho tenuto conto che i proiettori sono operatori autoaggiunti).

Si noti che  $T_1$ , essendo un operatore lineare, può essere applicato anche allo stato  $|1, q\rangle$ .

## Introduciamo la particella 2

Tutto ciò che ho detto per la particella 1 si ripete pari pari per la 2, con qualche agguistamento nelle notazioni. Le fenditure dove passa 2 le chiamerò  $c$  e  $d$ , con  $c$  opposta ad  $a$  e  $d$  opposta a  $b$ . L'ascissa sullo schermo la chiamerò  $y$

invece di  $x$ , positiva da  $c$  verso  $d$  e con origine a metà tra le fenditure. Definirò poi i proiettori

$$T_c, T_d; T_2 \stackrel{\text{def}}{=} T_c + T_d$$

ecc.

Mi sembra inutile scrivere le corrispondenti delle varie equazioni, in particolare (3) e (6), per la particella 2. È invece necessario studiare in dettaglio la dinamica del sistema composto dalle due particelle; ma per questo è opportuna una parentesi matematica.

### Parentesi matematica

Fin qui ci siamo occupati delle due particelle separatamente, con l'eccezione della (1) (su cui tornerò più avanti). Ciascuna particella ha il suo spazio degli stati:  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  (spazi di Hilbert). I ket che ho scritto in vari punti sono vettori di questi spazi, e si riconosce lo spazio di appartenenza da scritture come  $|1, p\rangle$ ; anche se a un certo punto, dato che parlavo solo e sempre della particella 1, l'indicazione "1" è stata soppressa.

Di passaggio, osservo che ho quasi sempre scritto "stato" dove avrei dovuto scrivere "vettore" (elemento di  $\mathcal{H}_1$ ). A rigore uno stato non coincide con un vettore, perché vettori che differiscono per un moltiplicatore scalare rappresentano lo stesso stato. Inoltre è regola comune che i vettori rappresentativi degli stati siano da intendersi *normalizzati*: es.  $\langle 1, p | 1, p \rangle = 1$ . Di conseguenza la relazione fra stati e vettori diventa più ristretta: i vettori che rappresentano uno stesso stato dovendo essere normalizzati, potranno differire al più per un *fattore di fase*.

Una difficoltà addizionale nasce quando intervengono osservabili aventi spettro continuo (come sono posizione e impulso). A rigore gli autovettori di tali osservabili non esistono; tuttavia si estende (alla Dirac) la notazione anche a questi casi, come ho fatto continuamente, facendo uso di "autovettori" (fra virgolette, a indicare l'abuso di notazione) dell'impulso e della posizione. Una conseguenza è che per es. la (3) e la (6) non danno realmente una probabilità, ma piuttosto una *densità di probabilità*. sorvolo dul problema della normalizzazione, che riciede l'intervento della  $\delta$  di Dirac...

Ho scritto tutto questo non per una vera necessità, ma per evitare che qualcuno leggendo possa confondersi.

Un altro aspetto matematico entra in ballo quando il sistema è fatto di due particelle. Nella (1) si legge una scrittura come

$$|1, p\rangle |2, -p\rangle \tag{7}$$

ma come bisogna leggere quel "prodotto" di due ket, che appartengono l'uno a  $\mathcal{H}_1$  e l'altro a  $\mathcal{H}_2$ ?

La risposta è che si tratta di un “prodotto tensoriale,” un elemento dello spazio  $\mathcal{H}$  prodotto tensoriale di  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2.$$

Bisognerebbe quindi scrivere

$$|1, p\rangle \otimes |2, -p\rangle$$

ma di regola si evita, per non appesantire la notazione.

È necessario rimarcare che  $\mathcal{H}$  non consiste solo dei prodotti tensoriali degli elementi di  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ , ma anche di tutte le loro combinazioni lineari (del resto ce ne accorgeremo subito). Gli stati che hanno vettori che sono prodotti, come in (7), sono *non intrecciati*; gli altri sono *stati intrecciati*, e sono quelli per noi di particolare interesse.

Quasi superfluo far notare che lo stato (1) è appunto uno stato intrecciato: è proprio il comportamento di questi stati dopo la misura eseguita su una sola particella, il tema della presente discussione.

### Stati a due particelle e loro evoluzione

Cominciamo con uno stato non intrecciato:

$$|1, p\rangle |2, -p\rangle. \quad (8)$$

È piuttosto ovvio che quando le due particelle arrivano sulle proprie fenditure, questo stato diventa

$$T_1 |1, p\rangle T_2 |2, -p\rangle \quad (9)$$

che scriverò anche

$$T_1 T_2 |1, p\rangle |2, -p\rangle. \quad (10)$$

C'è una sottile differenza tra la (9) e la (10), che si evidenzia usando delle parentesi:

$$(T_1 |1, p\rangle)(T_2 |2, -p\rangle) \quad (9')$$

$$(T_1 T_2)(|1, p\rangle |2, -p\rangle). \quad (10')$$

Nella (9') si applica  $T_1$  a  $|1, p\rangle$  (ottenendo ancora un vettore di  $\mathcal{H}_1$ ) e  $T_2$  a  $|2, -p\rangle$  (ottenendo un vettore di  $\mathcal{H}_2$ ); poi si fa il prodotto tensoriale, arrivando a un risultato che appartiene a  $\mathcal{H}$ . Invece nella (10') si fa il prodotto tensoriale dei due vettori  $|1, p\rangle$  e  $|2, -p\rangle$ , con risultato in  $\mathcal{H}$ , e a questo si applica il prodotto  $T_1 T_2$  con risultato ancora in  $\mathcal{H}$ .

Ma che prodotto è  $T_1 T_2$ ? In realtà questo è un altro abuso di notazione: si sarebbe dovuto scrivere

$$(T_1 \otimes I_2)(I_1 \otimes T_2)$$

dove  $I_1, I_2$  sono gli *operatori identità* risp. in  $\mathcal{H}_1$  e in  $\mathcal{H}_2$ . Basta intendersi, ma almeno una volta è bene essere espliciti. . .

Las (10) (ovvero (10')) è la forma più utile per il passo successivo, in cui partiremo dallo stato intrecciato (1):

$$|1, p\rangle |2, -p\rangle + |1, q\rangle |2, -q\rangle. \quad (1)$$

Applichiamo a questo  $T_1 T_2$ :

$$T_1 T_2 (|1, p\rangle |2, -p\rangle + |1, q\rangle |2, -q\rangle). \quad (11)$$

Questo è lo stato che descrive le due particelle che hanno attraversato le fenditure.

Ora dobbiamo calcolare la probabilità congiunta che 1 venga rivelata nel punto  $x$  del suo schermo, e 2 nel punto  $y$  del suo. L'ampiezza è semplice: si deve fare il prodotto scalare per  $|x\rangle|y\rangle$

$$\begin{aligned} \langle x|\langle y| T_1 T_2 (|1, p\rangle |2, -p\rangle + |1, q\rangle |2, -q\rangle) = \\ \langle x | T_1 | 1, p\rangle \langle y | T_2 | 2, -p\rangle + \langle x | T_1 | 1, q\rangle \langle y | T_2 | 2, -q\rangle. \end{aligned}$$

La richiesta probabilità è il modulo quadrato di questa:

$$\begin{aligned} W(x, y) = \\ |\langle x | T_1 | 1, p\rangle|^2 |\langle y | T_2 | 2, -p\rangle|^2 + |\langle x | T_1 | 1, q\rangle|^2 |\langle y | T_2 | 2, -q\rangle|^2 + \\ \langle x | T_1 | 1, p\rangle \langle 1, q | T_1 | x\rangle \langle y | T_2 | 2, -p\rangle \langle 2, -q | T_2 | y\rangle + \\ \langle x | T_1 | 1, q\rangle \langle 1, p | T_1 | x\rangle \langle y | T_2 | 2, -q\rangle \langle 2, -p | T_2 | y\rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Nella (12) si riconoscono nella prima riga le somme delle due probab. di trovare le particelle in  $x, y$  se emesse con impulsi  $p, -p$  oppure  $q, -q$ ; nella seconda e terza riga i termini di correlazione fra le due particelle. Ma non è finita, perché  $T_1 = T_a + T_b$  e  $T_2 = T_c + T_d$ , per cui ogni termine contiene l'interferenza tra le due fenditure relative a ciascuna particella. Difficilmente decifrabile. . .