E. Fabri *ottobre 2011**

Peso di un corpo in moto

Il problema

Voglio discutere la domanda: un corpo che si muove pesa di più? di meno? Ovvero: la massa gravitazionale dipende dalla velocità? Naturalmente si tratta di risolvere il problema nell'ambito della RG.

Ho pensato di studiare il moto del corpo (nella geometria di Schwarzschild) per verificare se l'accelerazione sia esprimibile in una forma semplice e generale. La situazione fisica cui penso è la seguente. Abbiamo un laboratorio, fermo nelle coordinate di Schwarzschild, in particolare a una certa $r = \bar{r}$. In questo laboratorio si studia il moto di un corpo che cade, misurandone l'accelerazione. Conviene separare il problema in due parti: la prima, in cui il moto è verticale, è la più semplice. La seconda tratta invece la traiettoria del corpo lanciato orizzontalmente, per studiare il raggio di curvatura in funzione della velocità. In questo secondo caso la difficoltà sta nel definire il "raggio di curvatura," visto che le sezioni spaziali non sono euclidee.

Il moto verticale, ossia radiale

Come d'uso, assumo $c = 1$, $G = 1$, e inoltre prendo il raggio di Schwarzschild $2M$ come unità di lunghezza. Le equazioni sono le solite[(1)]:

$$\frac{r-1}{r}\,\dot{t} = E \tag{1}$$

$$\frac{r}{r-1}\,E^2 - \frac{r}{r-1}\,\dot{r}^2 = 1. \tag{2}$$

Dalla (2) si ha

$$\dot{r}^2 = E^2 - 1 + \frac{1}{r} \tag{3}$$

e derivando la (3) rispetto a τ si trova

$$\ddot{r} = -\frac{1}{2\,r^2}. \tag{4}$$

* La versione originaria, del marzo 2005, trattava solo il caso di moto orizzontale, ed era incompleta. Nella versione del dicembre 2006 l'impostazione è stata cambiata: si studia prima il moto verticale, poi quello orizzontale. La versione attuale differisce per maggiori spiegazioni e commenti, oltre alla correzione di alcuni errori.

(1) Mi riferisco per es. alla mia *Introduzione alla Relatività Generale*.

La velocità misurata nel laboratorio si ottiene come segue. Indico con $\bar{t}$ il tempo proprio di un orologio fermo in quel punto, che è connesso a t dalla relazione

$$d\bar{t} = \sqrt{\frac{\bar{r}-1}{\bar{r}}}\,dt$$

mentre la relazione tra t e il tempo proprio τ della particella si ottiene dalla (1):

$$\frac{dt}{d\tau} = E\,\frac{\bar{r}}{\bar{r}-1}.$$

Quindi

$$\frac{d\bar{t}}{d\tau} = E\sqrt{\frac{\bar{r}}{\bar{r}-1}}. \tag{5}$$

D'altra parte la "lunghezza vera" ℓ è legata a r dalla metrica:

$$\frac{d\ell}{dr} = \sqrt{\frac{\bar{r}}{\bar{r}-1}}.$$

La velocità cercata è $d\ell/d\bar{t}$:

$$v = \frac{d\ell}{d\bar{t}} = \frac{d\ell}{dr}\,\frac{dr}{d\tau}\,\frac{d\tau}{d\bar{t}} = \frac{\dot{r}}{E}$$

e questa relazione può essere usata per eliminare E:

$$E = \dot{r}/v.$$

Se si sostituisce nella (3) si trova

$$\dot{r}^2 = \gamma^2 v^2\,\frac{\bar{r}-1}{\bar{r}}$$

col solito significato di γ. Da qui

$$E = \gamma\sqrt{\frac{\bar{r}-1}{\bar{r}}}. \tag{6}$$

Il calcolo dell'accelerazione si fa come segue:

$$a = \frac{dv}{d\bar{t}} = \frac{d}{d\bar{t}}\,\frac{\dot{r}}{E} = \frac{\ddot{r}}{E}\,\frac{d\tau}{d\bar{t}} = -\frac{1}{2\,\bar{r}^2}\,\frac{1}{E^2}\sqrt{\frac{\bar{r}-1}{\bar{r}}} = -\frac{1}{2\gamma^2\bar{r}^2}\sqrt{\frac{\bar{r}}{\bar{r}-1}} \tag{7}$$

(ho fatto uso delle (4), (5), (6)).

Interpretazione

Per interpretare la (7) osserviamo che la seconda legge della dinamica relativistica, nel caso di forza parallela alla velocità, fornisce

$$F = m\gamma^3 a$$

da cui, usando la (7):

$$F = -\frac{m\gamma}{2\,\bar{r}^2}\sqrt{\frac{\bar{r}}{\bar{r}-1}}. \tag{8}$$

Al limite di campo debole ($\bar{r} \gg 1$) e ripristinando le unità ordinarie, dalla (8) si ha

$$F = -\frac{GMm\gamma}{\bar{r}^2} \tag{9}$$

che può essere interpretata dicendo che la massa gravitazionale è $m\gamma$, ossia l'energia del corpo divisa per c^2. Ma anche se $\bar{r}$ non è $\gg 1$ la (8) dice sempre che in una posizione data la forza di gravità è proporzionale a $m\gamma$, che quindi può in ogni caso essere vista come massa gravitazionale.

Il moto orizzontale

In questo caso il problema è in due dimensioni, e occorre usare anche la coordinata angolare φ. Le equazioni sono ben note:

$$r^2\dot{\varphi} = J \qquad \frac{r-1}{r}\,\dot{t} = E \tag{10}$$

e poi

$$\frac{r}{r-1}\,E^2 - \frac{r}{r-1}\,\dot{r}^2 - \frac{J^2}{r^2} = 1 \tag{11}$$

ossia

$$\dot{r}^2 = E^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 + \frac{J^2}{r^2}\right). \tag{12}$$

Questa con la prima delle (10) dà

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E^2-1}{J^2}\,r^4 + \frac{1}{J^2}\,r^3 - r^2 + r \tag{13}$$

e derivando rispetto a φ

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} = 2\,\frac{E^2-1}{J^2}\,r^3 + \frac{3}{2J^2}\,r^2 - r + \tfrac{1}{2}. \tag{14}$$

Dalla (13) si ricava il valore minimo (o massimo) di r, annullando $dr/d\varphi$: detto b tale valore, esso soddisfa

$$\frac{E^2-1}{J^2}\,b^3 + \frac{1}{J^2}\,b^2 - b + 1 = 0. \tag{15}$$

Sostituendo nella (14) si ottiene:

$$\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right)_{r=b} = -\frac{b^2}{2J^2} + b - \tfrac{3}{2}. \tag{16}$$

Calcolo della velocità ed eliminazione delle costanti del moto

Con la notazione già usata per il moto verticale, la velocità nel punto $r = b$ si scrive $b\,d\varphi/d\bar{t}$. D'altra parte $d\varphi/d\tau$ è dato dalla prima delle (10), mentre la relazione fra $\bar{t}$ e τ è la (5) già scritta; quindi

$$v = b\,\frac{d\varphi}{d\bar{t}} = b\,\frac{d\varphi}{d\tau}\,\frac{d\tau}{d\bar{t}} = \frac{J}{E}\sqrt{\frac{b-1}{b^3}}.$$

Si può usare questa per eliminare E:

$$E = \frac{J}{v}\sqrt{\frac{b-1}{b^3}}$$

e sostituendo nella (15) si esprime J in termini di b e v:

$$J = \frac{bv}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{17}$$

Infine, sostituendo nella (16)

$$\left(\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right)_{r=b} = b - 1 - \frac{1}{2v^2}. \tag{18}$$

La (18) ci dà subito la velocità dell'orbita circolare ($r = \text{cost.}$):

$$v = \frac{1}{\sqrt{2\,(b-1)}}$$

mentre la velocità newtoniana sarebbe $1/\sqrt{2b}$. Per la Terra ($b = 7.2 \cdot 10^8$) la differenza è solo sulla nona cifra.

Geodetiche spaziali

Per discutere la curvatura della traiettoria orizzontale, occorre risolvere preliminarmente il problema posto dalla non-euclideità delle sezioni spaziali della geometria di Schwarzschild. A questo scopo, partirò dall'assunzione che un osservatore fermo in un dato punto dello spazio interpreti come "rette" le geodetiche di tipo spazio con $t = \text{cost.}$: bisogna dunque studiare tali geodetiche.

Per le geodetiche di tipo spazio e con $t = \text{cost.}$ si possono utilizzare i risultati precedenti, con la sola avvertenza di porre $E = 0$ per avere t costante, di cambiare il simbolo per J (userò q) e di cambiare il segno a secondo membro nella (10), che diventa quindi

$$\frac{r}{r-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \frac{q^2}{r^2} = 1 \tag{19}$$

ossia

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 1 - \frac{1}{r} - \frac{q^2}{r^2} + \frac{q^2}{r^3} \tag{20}$$

(qui s indica la lunghezza propria). La (18) mostra che $dr/ds = 0$ per $r = q$.

Derivando la (20) rispetto a s si ha

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{1}{2\,r^2} + \frac{q^2}{r^3} - \frac{3q^2}{2\,r^4}$$

e in particolare

$$\left(\frac{d^2 r}{ds^2}\right)_{r=q} = \frac{1}{q} - \frac{1}{q^2}$$

mentre la prima delle (10) fornisce

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)_{r=q} = \frac{1}{q}.$$

Si può quindi parametrizzare la geodetica come segue:

$$\begin{aligned} r &= q + \frac{q-1}{2\,q^2}\,s^2 + O(s^4) \\ \varphi &= s/q + O(s^3) \end{aligned} \tag{21}$$

(per simmetria r è funzione pari di s, mentre φ è dispari).

Curvatura osservata della geodetica del corpo in moto

Un ipotetico osservatore fermo in $r = b$, $\varphi = 0$ eseguirà misure sulla traiettoria del corpo, e cercherà di dedurne la curvatura. La traiettoria non è che la proiezione sulla sezione spaziale della curva oraria; avrà dunque un'equazione polare che si deduce dalla (16):

$$r = b + \frac{1}{2}\left(b - 1 - \frac{1}{2v^2}\right)\varphi^2 + O(\varphi^4) \tag{22}$$

D'altra parte la prima delle (10) fornisce (in $\varphi = 0$)

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{J}{b^2} = \frac{v}{b\sqrt{1-v^2}}$$

mentre lungo la traiettoria la relazione fra τ e s è la solita della relatività ristretta:

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Da queste due si ottiene $d\varphi/ds = 1/b$ e quindi la (22) diventa

$$r = b + \frac{1}{2b^2}\left(b - 1 - \frac{1}{2v^2}\right)s^2 + O(s^4). \tag{23}$$

Accanto a questa avremo

$$\varphi = \frac{s}{b} + O(s^3). \tag{24}$$

La curvatura della traiettoria verrà dedotta dallo scostamento di questa dalla geodetica spaziale con $q = b$. Dalle (22), (23) confrontate con le (21) si ha

$$\Delta r = \frac{s^2}{4\,b^2 v^2} \qquad \Delta\varphi = 0$$

a meno di $O(s^4)$. Ne segue uno spostamento trasversale

$$\Delta l = \Delta r \sqrt{\frac{b}{b-1}} = \frac{s^2}{4\,b^2 v^2} \sqrt{\frac{b}{b-1}}$$

e la curvatura si calcola come

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2}{ds^2}\,\Delta l = \frac{1}{2\,b^2 v^2} \sqrt{\frac{b}{b-1}}. \tag{25}$$

Accelerazione e massa gravitazionale

Dalla (25) si ha subito per l'accelerazione centripeta:

$$a = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{1}{2\,b^2} \sqrt{\frac{b}{b-1}}$$

che per $b \gg 1$, e scritta in unità usuali diventa

$$a = \frac{GM}{b^2}. \tag{26}$$

Usando l'espressione della forza trasversale

$$F = m\gamma a = \frac{GMm\gamma}{b^2}$$

che concorda con la (9): per il calcolo dell'accelerazione, tanto nel moto radiale quanto per quello trasversale, occorre usare come massa gravitazionale del corpo in caduta il valore $m\gamma$.