E. Fabri *febbraio 2020* *

Tensione di una corda, corrente di quantità di moto ... di che cosa stiamo parlando?

(BOZZA)

1. Introduzione

Che cosa c'è di più semplice della tensione di una corda? Eppure vedremo che questo concetto presenta aspetti tutt'altro che banali, e viene correntemente frainteso. La corrente di quantità di moto, già nel nome, appare qualcosa di ben più complesso; ma tra i due concetti c'è una stretta parentela.

Lo spunto per queste riflessioni mi è stato dato dalla polemica divampata in Germania alcuni anni fa attorno al *Karlsruher Physikkurs* (1). Uno dei punti intorno al quale si è accesa la controversia è stato appunto il significato da attribuire a termini come "tensione" e "corrente di quantità di moto." Ce ne sono anche altri, ma non li tratterò in questa sede. Così pure non parlerò qui dell'insieme della controversia, né per i suoi aspetti più fisici né per quelli che potrei definire "politici."

Una premessa è necessaria: tutta la trattazione in questo articolo è *non relativistica.* Una trattazione relativistica è possibile e in certi casi necessaria; a volte non presenta difficoltà, ma in altri casi può essere piuttosto delicata. Non mi è sembrato il caso di aggiungere al nostro discorso ulteriori problemi.

2. La tensione di una corda è una forza, ovviamente ... o no?

Non credo esista libro di testo che non dica questo: per es. nel trattare il pendolo semplice si applica $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ scrivendo qualcosa come

$$m\,\mathbf{a} = m\,\mathbf{g} + \mathbf{T}$$

"dove $\mathbf{T}$ è la tensione del filo." E potrei facilmente trovare numerosissimi esempi, anche con più fili, o con un filo che gira attorno a una carrucola, nei quali si ripete sempre la stessa frase.

---

* Versione originaria: ottobre 2015. La presente è una versione aggiornata.

(1) Tutta la documentazione era reperibile in internet (in inglese) nel sito [1]:
– Il verdetto della DPG [2]
– Il parere della commissione di esperti nominata dalla DPG [3]
– La replica di Friedrich Herrmann [4].
Causa il tempo trascorso, ciò non è più vero: alcuni documenti si trovano ancora in
`http://www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de/index-alt.html`
ma solo in tedesco. Per questa ragione ho temporaneamente copiato la versione inglese in [5].

Ma riflettiamo. Se il filo è elastico e ci serve l'allungamento, scriviamo la legge di Hooke come

$$T = k\,\frac{\Delta l}{l}$$

e qui naturalmente T è uno scalare. Ci si può difendere dicendo che T è il *modulo* della tensione, e vada pure. Ma la proporzionalità tra allungamento e lunghezza, sotto l'azione di una forza esterna fissata, viene giustificato (anche se non esplicitamente) in base al fatto che "la tensione è la stessa lungo tutto il filo."

È chiaro che nella frase tra virgolette la parola "tensione" ha un signifcato diverso: non è più la forza applicata agli estremi del filo, né quella che il filo applica a un corpo ad esso collegato. È invece qualcosa di *interno* al filo, che si può visualizzare con l'espediente d'immaginare una *sezione* fittizia, che separa due tratti del filo (fig. 1). Allora la tensione è la forza che la sezione di sinistra applica a quella di destra, *e anche viceversa*, grazie al terzo principio.

Già: ma quale delle due merita il nome di tensione? Non è indifferente, visto che sono opposte... Si può rispondere che si tratta di una convenzione: scegliamo per es. la forza che la sezione di destra applica a quella di sinistra, sì che (assumendo come di solito un asse delle ascisse orientato verso destra) la tensione-forza riesca naturalmente positiva.

Il problema con le convenzioni è che bisogna tenerle sempre a mente, e può accadere di doverle cambiare; allora diventa necessario ricordarsi tutte le conseguenze del cambiamento. Nel nostro caso, se orientiamo l'asse x verso sinistra, che succede alla tensione? diventa negativa? Nessuno vorrebbe questo, e quindi occorre insieme cambiare anche la definizione: "la tensione è la forza che la parte di filo ad ascissa maggiore esercita su quella ad ascissa minore." Così va bene, ma converrete con me che sta diventando macchinosa; non ci sarà una strada più semplice, e soprattutto che ci liberi dal legame con la scelta del sistema di coordinate (SC)?

Questo è un punto importante, che si ritrova in molte altre parti della fisica. Non c'è il minimo dubbio che il "metodo delle coordinate," ossia l'invenzione della geometria analitica, sia uno strumento matematico essenziale in molti casi del discorso fisico. Ma non è bene dimenticare che fatti, fenomeni, leggi della fisica hanno carattere *intrinseco* e dovrebbe sempre essere possibile trattarli senza legarsi a un SC. Il che non vuol dire fare a meno della matematica, anzi: sono proprio i matematici a privilegiare le trattazioni intrinseche, in quanto sono spesso capaci di cogliere più a fondo la sostanza di ciò che si sta studiando.

Come capita non di rado, la risposta arriva guardando il problema più in generale. Nel nostro caso, anziché limitarsi a un sistema unidimensionale, come un filo, riesce utile pensare a un sistema tridimensionale: un fluido, un solido...

3. Tanto che ci siamo: che cos'è la pressione?

In materia di definizione della pressione (in un gas, in un liquido) si ripresenta qualcosa di simile a ciò che abbiamo incontrato per la tensione in un filo. Di solito si comincia definendo la pressione come un rapporto forza/superficie: per es. la forza agente su un pistone che comprime un liquido, divisa per l'area del pistone.

Però nasce subito un problema: la forza è un vettore, l'area uno scalare; dunque la pressione sarà anch'essa un vettore? C'è chi lo dice esplicitamente, purtroppo... Poi c'è chi usa espressioni come "la pressione del liquido si esercita perpendicolarmente in ogni punto della parete": frase che ha senso solo se la pressione possiede una direzione, quindi è un vettore.

[si può intendere come vettore anche l'area ...]

La corretta rappresentazione della pressione la vede invece come uno *scalare*: su questo ritorneremo. Ma è bene rimarcare che anche in testi dove la pressione viene definita come scalare, poi si leggono frasi come "la pressione atmosferica è dovuta al peso dell'aria sovrastante." Si possono trovare argomenti a difesa: in fin dei conti se non ci fosse la gravità, e quindi il peso dell'aria, l'atmosfera non avrebbe una pressione, anzi in verità non esisterebbe proprio... Tuttavia esprimersi in quel modo non può non indurre a credere che l'atmosfera "spinga" dall'alto verso il basso.

Basterebbe proporre esempi diversi, come la camera d'aria di una bicicletta, per far capire che la pressione in un gas non ha niente a che vedere, se non in condizioni particolari, con la gravità. Di più: lo stesso esempio mostra anche che la pressione è la misura di una proprietà del gas, di cui la forza esercitata sulle pareti è un effetto, non la causa. Ancor più lo dimostra il fatto che in un gas si può propagare un suono, nella forma di un'onda in cui diverse grandezze del gas variano da punto a punto e nel tempo: fra queste la densità, la temperatura, e — appunto — la pressione.

4. Il concetto di corrente

Il concetto di corrente nasce nella dinamica dei fluidi, dove si applica a una precisa grandezza fisica: la *massa* (o anche il volume, per i fluidi incomprimibili). In questo ambito si parla di *densità*, di *velocità* (del fluido), di *densità di corrente*. La formulazione matematica (analisi dei campi scalari e vettoriali) porta agli operatori differenziali quali *gradiente*, *divergenza*, *rotazione* e all'operatore integrale *flusso*.

Ricordo i simboli e le relazioni fondamentali: ϱ è la densità (di massa), $\mathbf{v}$ la velocità, $\mathbf{j}$ la densità di corrente, Φ il flusso. In un fluido in moto si ha

$$\mathbf{j} = \varrho\,\mathbf{v} \tag{1}$$

e vale l'*equazione di continuità*

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \tag{2}$$

Più precisamente, l'interpretazione fisica di $\mathbf{j}$ è la seguente. Sia $d\sigma$ un elemento *orientato* di superficie, $\mathbf{n}$ il versore della normale positiva: allora la massa che attraversa nel tempo dt l'area $d\sigma$ nel verso positivo è $dM = \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma\, dt$. Il flusso di massa per unità di tempo attraverso una superficie finita Σ è il corrispondente integrale

$$\Phi(\Sigma) = \int_\Sigma \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma. \tag{3}$$

Occorre soffermarsi un momento sulla (1). Questa dice che il trasporto di massa è *convettivo* (non potrebbe essere altrimenti): la grandezza "massa" viene trasportata solo grazie al *movimento* delle parti di materia che posseggono quella massa. Questo è ovvio, ma non è sempre vero per il trasporto di altre grandezze, come vedremo in seguito. In molti casi neppure si può definire una velocità di qualcosa che trasporta la grandezza in questione.

Da un punto di vista storico, dopo la nascita della meccanica dei fluidi nel '700, si ha uno sviluppo in due direzioni: in primo luogo la generalizzazione alla meccanica dei continui, con la complicazione addizionale della presenza nei solidi (e nei fluidi viscosi) di sforzi non puramente normali (vedremo). Ma soprattutto si attua l'estensione del paradigma del "mezzo continuo" e del concetto di *campo*, scalare e vettoriale, al difuori della meccanica. Questi sviluppi iniziano nel '700 ma proseguono nell'800 e oltre.

Per il presente discorso è importante sottolineare che le idee di densità e di corrente sono divenute di uso comune anche per grandezze *astratte*, ossia prive di un riferimento materiale, quali energia, carica elettrica, quantità di moto... Ed è di questa generalizzazione che dobbiamo occuparci.

[Trasporto, attraversa... Non c'è una *sostanzializzazione* delle grandezze trasportate?]

5. Corrente di una grandezza scalare

Esistono oggi molti casi in fisica in cui si parla di "corrente." Nei più comuni si tratta della corrente di una grandezza *scalare*: carica elettrica, energia, probabilità (in m.q.). Sia W una grandezza conservata, w la sua densità; indichiamo con $\mathbf{j}_W$ la corrispondente densità di corrente (un campo vettoriale: in seguito abbrevierò con "ddc").

Il significato fisico di $\mathbf{j}_W$ è la naturale generalizzazione di quello già visto per la ddc in un fluido: la quantità di W che attraversa nel tempo dt l'area $d\sigma$ nel verso positivo è

$$dW = \mathbf{j}_W \cdot \mathbf{n}\, d\sigma\, dt. \tag{4}$$

La *corrente* di W è il flusso di $\mathbf{j}_W$ attraverso Σ:

$$I_W(\Sigma) = \int_\Sigma \mathbf{j}_W \cdot \mathbf{n}\, d\sigma. \tag{5}$$

La conservazione di W porta all'equazione di continuità:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_W = 0 \tag{6}$$

o anche, in forma integrale, se Σ è il contorno del volume V, orientato verso l'esterno:

$$\frac{d}{dt} \int_V w\, dV + I_W(\Sigma) = 0.$$

Come già osservato, non è detto in generale che il trasporto di W sia convettivo, e quindi non avremo una generalizzazione della (1).

In alcuni casi (per es. energia, probabilità) non ci sono problemi di segno nella definizione di $\mathbf{j}_W$; in altri, quando il trasporto sia convettivo, può nascere confusione tra la definizione della grandezza e della ddc da una parte, e il moto dei portatori dall'altra, dato che questi ultimi possono essere di due segni. Così accade per la carica elettrica, il cui trasporto è integralmente convettivo.

Nel caso di un conduttore metallico (densità di carica ϱ; portatori = elettroni, aventi carica negativa $-e$) il verso positivo di $\mathbf{j}_Q$ è opposto a quello dei portatori:

$$\varrho = -ne \qquad \mathbf{j}_Q = -ne\mathbf{v} \tag{7}$$

dove n è la densità numerica degli elettroni, $\mathbf{v}$ la loro velocità media.

Invece in un conduttore elettrolitico, dove sono presenti portatori dei due segni, occorre distinguere e la (7) diventa

$$\varrho = n_\mathrm{c} q_\mathrm{c} + n_\mathrm{a} q_\mathrm{a} \qquad \mathbf{j}_Q = n_\mathrm{c} q_\mathrm{c} \mathbf{v}_\mathrm{c} + n_\mathrm{a} q_\mathrm{a} \mathbf{v}_\mathrm{a}. \tag{8}$$

Qui n_c, q_c, $\mathbf{v}_\mathrm{c}$ si riferiscono ai cationi ($q_\mathrm{c} > 0$) mentre le corrispondenti grandezze con l'indice $_\mathrm{a}$ si riferiscono agli anioni ($q_\mathrm{a} < 0$).

A dire il vero anche per un conduttore metallico avrei dovuto usare la (8), perché anche lì esistono "portatori" di due segni. Solo che le cariche positive non si muovono... [2] In generale la (8) chiarisce che si può avere densità di carica nulla e corrente non nulla: basta che sia $\varrho = 0$ e $\mathbf{v}_\mathrm{a} \neq \mathbf{v}_\mathrm{c}$. È proprio quello che succede in un metallo.

[2] Ci sono però i semiconduttori, dove accanto agli elettroni si usa considerare come portatori anche i "buchi" (o "lacune"). In questo caso si dovranno scrivere relazioni analoghe alle (8).

Un'altra osservazione è bene fare, perché ci tornerà utile in seguito. Per una data ddc $\mathbf{j}_W$, se s'inverte $\mathbf{n}$ anche dW cambia segno. Supponiamo per es. che in un certo mezzo ci sia una ddc di carica $\mathbf{j}_Q$ diretta come l'asse x positivo: allora se prendiamo $\mathbf{n}$ orientato nello stesso modo possiamo dire che la parte di sistema a sinistra di $d\sigma$ *cede una carica positiva* alla parte a destra; ma invertendo $\mathbf{n}$ possiamo dire altrettanto bene che la parte a destra *cede carica negativa* alla parte a sinistra. Stiamo solo descrivendo in due modi diversi la medesima situazione fisica (e non stiamo dicendo niente su chi siano i portatori, le loro cariche, il loro moto).

Ho usato più volte la parola "trasporto," e aggiungo che si dice normalmente "direzione del trasporto" di W. Il significato è ovvio: non è altro che la direzione (verso incluso) del vettore $\mathbf{j}_W$. Guardando la (4) si può dire di più: la direzione del trasporto di W è quella in cui riesce *massima* la quantità trasportata per unità di tempo.

6. Misura di una corrente: l'esempio dell'amperometro

Anche questo titolo può sembrare che presenti un argomento risaputo: chi non sa come si usa un amperometro? Ma ci sono aspetti che è necessario sistemare bene per prepararsi a casi meno banali, che verranno. Ho scritto "come si usa" perché non abbiamo bisogno di sapere "come funziona": ci basta guardare l'amperometro (per corrente continua) come un oggetto che presenta due *terminali* e un *visore* ("display": a lancetta o a cifre).

Tipicamente i terminali sono distinti fra loro dai segni + e −, anche se non sempre: per es. lo strumento che ho davanti mentre scrivo porta la scritta "Common" su un terminale e niente sull'altro. Questo dipende dal fatto che si tratta di un *multimetro*, per cui i segni algebrici sarebbero stati poco appropriati. Ma chi ha un minimo di pratica sa che il "Common" è il −. Lo strumento è dotato di *puntali*, di regola uno rosso e uno nero: è convenzione universale (credo) che il rosso vada collegato al + e il nero al −. Per semplificare ciò che segue, è bene che l'amperometro sia *a zero centrale*, se a lancetta; con indicazione *automatica del segno*, se a cifre.

Dopo questa descrizione pedantesca e apparentemente superflua, passiamo a chiederci: il nostro strumento è fatto per misurare una corrente elettrica (continua, ossia costante o lentamente variabile nel tempo); ma che cosa ha a che fare la descrizione pratico/costruttiva con la definizione di corrente data sopra? La risposta è semplice. Possiamo supporre che l'area Σ sia un cerchio avente per contorno quello del foro del terminale +, orientato *verso l'interno* dello strumento. Ciò che leggeremo sul visore non è che il valore (in A, mA, μA ...) di $I_Q(\Sigma)$.

Supponiamo che io abbia inserito lo strumento in un circuito dove voglio misurare la corrente, e che sul visore abbia letto +1.23 A. Ora inverto il collegamento, ossia collego il puntale rosso dove prima avevo messo quello nero, e viceversa: che cosa leggerò? (Spero vivamente che chi mi sta leggendo non si senta preso in giro: assicuro che questi passi sono necessari per ciò che verrà dopo ...) Tutti sappiamo che mi aspetto -1.23 A. Ma perché? Semplice: *rispetto al circuito* ho invertito il verso positivo di Σ e la definizione (5) di corrente implica che debba aversi un cambiamento di segno.

Tutto qui, per ora...

7. Il concetto di tensore

Torniamo ai concetti di corrente e di ddc. Rispetto a ciò che abbiamo già visto, la situazione si presenta meno semplice quando la grandezza conservata *non è scalare*. Qui basterà occuparsi di grandezze vettoriali: caso tipico e per noi importante, la quantità di moto $\mathbf{P}$. Indicherò con $\mathbf{p}$ la corrispondente densità. In questo caso la ddc non è più un vettore, ma un *tensore*: vediamo perché, aprendo prima una parentesi sulla definizione di tensore che meglio si presta per il nostro caso.

Definirò *tensore* — più esattamente, tensore di rango $(1,1)$ — un'*applicazione lineare tra due spazi vettoriali di uguale dimensione*. A noi interesserà solo il caso di spazi reali di dimensione 3 (beh, non solo ... ma non anticipiamo).

Esempi
1) L'applicazione che fa passare dallo spazio delle velocità angolari di un corpo rigido a quello dei momenti angolari (rispetto al centro di massa): $\mathbf{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$. Qui I non è che il *tensore d'inerzia*.

2) L'applicazione che manda il campo elettrico $\mathbf{E}$ nell'induzione $\mathbf{D}$ in un dielettrico (anche non isotropo): $\mathbf{D} = \varepsilon\,\mathbf{E}$. Si tratta del tensore della *costante dielettrica*.

Dagli esempi appare anche la notazione che adotto per l'azione di un tensore su un vettore: è la semplice giustapposizione dei due simboli, senza parentesi né altro.

Occorre sottolineare che un tensore è un'applicazione lineare *per definizione*. Pensando agli esempi, nel caso del tensore d'inerzia la linearità è garantita dalle definizioni di velocità angolare e di momento angolare. Nel caso dielettrico invece bisogna fare un'ipotesi, che non è sempre soddisfatta in natura: che la polarizzazione del dielettrico sia *lineare*.

La definizione data di tensore è *intrinseca*, nel senso che non richiede e non fa uso di un particolare SC. I vettori (forze, velocità ...) si possono definire in un sistema fisico anche se non si usano coordinate; lo stesso accade per i tensori, come quelli degli esempi che abbiamo visto e gli altri che può essere utile introdurre. Naturalmente qualora si vogliano usare coordinate avrà senso parlare di *componenti* di un tensore rispetto a quel SC, così come si parla di componenti di un vettore. Ma noi non ne avremo bisogno. (3)

A proposito di componenti è però opportuna una nota, con riferimento a certi usi che è possibile incontrare. Le componenti di un tensore T vengono di regola rappresentate in forma di *matrice*, il cui significato è che il prodotto (righe per colonne) della detta matrice per il "vettore colonna" delle componenti di un vettore $\mathbf{u}$ dà il vettore colonna delle componenti del risultato $\mathbf{v} = T\mathbf{u}$.

L'espressione "vettore colonna" è stata messa tra virgolette anche per indicare che non sembra una denominazione felice: un vettore *non è* una terna di numeri reali, né disposti in riga né in colonna, così come un tensore *non è una matrice*.

Ma se si accetta il concetto di "vettore colonna," e si vede un tensore come una matrice, è naturale vedere lo stesso tensore anche come una *terna di vettori*: appunto le tre colonne della matrice. In questo senso si parla a volte di vettori come componenti di tensori. Chi legge avrà già capito che in questo scritto ci si terrà lontani da simili usi…

8. Ddc della quantità di moto, ovvero tensore degli sforzi

La relazione fra la qdm $\mathbf{P}$ (4) e l'elemento di superficie $\mathbf{n}\,d\sigma$ è lineare, ed è quindi espressa da un tensore: la *densità di corrente* Θ *di qdm*. Più esattamente: $d\mathbf{P} = \Theta\,\mathbf{n}\,d\sigma\,dt$ è la qdm che nel tempo dt attraversa l'elemento di superficie $d\sigma$ nel verso individuato da $\mathbf{n}$.

E qui bisogna stare attenti: una cosa è il vettore qdm $d\mathbf{P}$, un'altra il vettore $\mathbf{n}\,d\sigma$ che designa l'elemento di superficie. In particolare, non c'è nessuna relazione necessaria tra le loro direzioni: la qdm che attraversa una data superficie può avere *qualunque direzione*. Solo in casi particolari una relazione c'è: ne riparleremo più avanti.

La definizione di *corrente di qdm* ripete il caso di una grandezza scalare: la corrente attraverso una superficie orientata Σ è il *vettore*

$$\mathbf{I}_{\mathbf{P}}(\Sigma) = \int_{\Sigma} \Theta\,\mathbf{n}\,d\sigma.$$

Stante la relazione generale $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$, la ddc della qdm può anche essere letta in termini di forza: $d\mathbf{F} = \Theta\,\mathbf{n}\,d\sigma$ è la forza che la porzione di materia "a monte" dell'elemento di superficie $d\sigma$ esercita sulla porzione "a valle." Quando si adotta questo punto di vista, la ddc della qdm cambia nome e diventa il

(3) Anzi, ne faremo a meno volutamente, perché l'uso delle coordinate *confonde* aspetti essenziali del discorso.

(4) D'ora in poi scriverò "qdm" per "quantità di moto."

tensore degli sforzi ("stress tensor" in inglese). È questa la terminologia usuale nella meccanica dei sistemi continui, fluidi o solidi. [5]

Tornando alla relazione $d\mathbf{P} = \Theta\,\mathbf{n}\,d\sigma dt$, vale di nuovo ciò che avevo osservato per la ddc (vettoriale) di una grandezza scalare. In un sistema fisico dato, se prendiamo un $\mathbf{n}$ opposto anche $d\mathbf{P}$ s'inverte. È la stessa cosa già vista nel caso scalare: se la parte sinistra cede alla destra una qdm $d\mathbf{P}$, possiamo anche dire che la destra cede alla sinistra la quantità di moto opposta $-d\mathbf{P}$. Non è che uno dei due modi di vedere sia giusto e l'altro sbagliato: è proprio *la stessa cosa*. Naturalmente tutto ciò vale anche per la corrente attraverso una superficie finita. In termini di forze, non è che il terzo principio.

È importante notare che nelle due scelte qualcosa resta invariato: se Σ e Σ' sono due superfici (piane) che differiscono solo per l'orientamento, e se $\mathbf{I_P}(\Sigma)$ ha verso concorde con Σ, lo stesso vale per $\mathbf{I_P}(\Sigma')$; se ha verso opposto, idem.

9. Ddc della qdm in condizioni statiche

Una proprietà di Θ che suona a prima vista paradossale, è che può essere *non nullo* in un sistema le cui parti sono tutte in *quiete*. Un ragionamento semplicistico suonerebbe infatti così: se tutto è fermo, non c'è qdm, quindi anche la ddc della qdm sarà nulla. Falso.

Basta pensare all'interpretazione di Θ come tensore degli sforzi per capirlo. Non c'è niente di strano se un sistema materiale in equilibrio è soggetto a sforzi nelle sue parti: un esempio semplicissimo è costituito da due carrelli agganciati tra i quali agisce una molla compressa (fig. 2). Trascureremo la gravità; se si preferisce, si può pensare che l'esperimento sia realizzato in un'astronave in moto inerziale, lontana da ogni massa.

In ogni sezione della molla orientata *da sinistra a destra* la corrente di qdm è un vettore diretto *verso destra*; se la sezione è orientata *da destra a sinistra* la corrente è diretta *verso sinistra*. Nel filo teso avviene l'opposto: in ogni sezione orientata da sinistra a destra si ha una corrente di qdm diretta verso sinistra; se la sezione è orientata da destra a sinistra la corrente è diretta verso destra.

Anche il materiale dei carrelli è soggetto a uno sforzo: nel carrello di sinistra la qdm diretta verso destra ricevuta dal filo si trasmette alla molla, mentre in quello di destra la stessa qdm risale dalla molla verso il filo.

Qui si vede come sia essenziale non confondere la direzione della corrente di qdm con la direzione della sezione attraverso cui la si misura. Consideriamo una curva chiusa γ orientata, che corre lungo la molla da sinistra a destra, scende fino al punto d'aggancio del filo, percorre questo da destra a sinistra, e infine risale fino alla molla (fig. 3). Se consideriamo varie sezioni che tagliano ortogonalmente γ e sono orientate in accordo con la curva, vediamo che una data qdm per unità di tempo (una data corrente) *percorre un circuito chiuso*,

[5] A parte il segno: la meccanica dei continui segue di regola la convenzione opposta.

dal carrello di sinistra a quello di destra attraverso la molla, e poi dal carrello di destra a quello di sinistra attraverso il filo. Ciascuna parte del sistema (carrelli, molla, filo) riceve in ogni intervallo di tempo tanta qdm quanta ne cede, per cui la qdm di ogni parte *rimane costante*: più esattamente nulla, dato che il tutto è in quiete.

Vediamo ancora un esempio: in fig. 4 è disegnato un omino che spinge contro un muro. Ci sono dei trenini che trasportano lungo un percorso chiuso la qdm (rappresentata dalla freccina). La direzione del trasporto, che corrisponde all'orientamento della curva γ nell'esempio precedente, è indicata invece dall'orientamento della locomotiva. [6] Nella parte di sinistra della figura è stato scelto un certo orientamento per il cammino chiuso; nella parte di destra quello opposto. Ogni trenino trasporta un vettore, che è la corrente di qdm: se si rovescia l'orientamento, anche la qdm trasportata s'inverte. Entrambe le rappresentazioni sono corrette, e descrivono un'unica situazione fisica: un sistema le cui parti (omino, muro, pavimento) sono soggette a sforzi interni e applicano forze l'una all'altra.

Si noti che attraverso il corpo dell'omino e lungo il muro la direzione del trasporto e quella della grandezza trasportata differiscono completamente: la freccina (qdm trasportata) forma un angolo, anche retto, con la direzione del trenino. Il che significa che è presente uno *sforzo di taglio*.

10. Il problema del trasporto

C'è però qualcosa da obiettare alla descrizione che ho appena data della situazione fisica di fig. 4. Ho parlato di *trasporto* e anche di *direzione del trasporto*: ma siamo sicuri che un tale modo d'esprimersi sia corretto?

Torniamo per un attimo al caso di una grandezza scalare, come la carica o l'energia. In quel caso la corrispondente ddc è un *campo vettoriale*, che ha una precisa direzione in ogni punto. Di più: al campo si possono associare delle *linee di campo*, in modo ben noto, ed è quindi del tutto corretto asserire che la carica o l'energia sono trasportate *lungo le linee di campo* della ddc.

Ma nel caso di una grandezza vettoriale, come la qdm, la ddc Θ è un *campo tensoriale*: possiamo ancora associargli una direzione definita? La risposta è no: non esiste una direzione privilegiata per un campo tensoriale, come accade per un campo vettoriale. A seconda di come si sceglie $\mathbf{n}\,d\sigma$ cambia $d\mathbf{P}$, ma in modo complicato; in generale $d\mathbf{P}$ non si annulla mai, né si può dire che ci sia una direzione di $\mathbf{n}\,d\sigma$ per la quale $d\mathbf{P}$ riesce massimo. Al più ce ne sarà una (ma non sempre, e non sempre una sola) in cui riesce massimo $|d\mathbf{P}|$.

---

[6] La parte di sinistra della figura è tratta da [6], fig. 12–1. Quella di destra l'ho aggiunta per quest'occasione, con l'aiuto di Umberto Penco, che ringrazio.

Qualcosa di più si può dire sulla relazione tra $\mathbf{n}\,d\sigma$ e $d\mathbf{P}$: ne parleremo nella prossima sezione. Ma resta il fatto che la semplice idea di una direzione di trasporto non si può applicare alla qdm o in generale a grandezze vettoriali.

Dunque ciò che si legge nella sezione precedente è del tutto privo di senso? Non del tutto, anche se le cose andrebbero discusse meglio e precisate. Per es. la curva γ, che poi è diventata il percorso del trenino, è in certa misura arbitraria, ma non del tutto: il percorso deve attraversare la superficie di contatto tra piedi e terreno, e quella tra mani e muro; deve chiudersi lungo il corpo dell'omino, lungo il muro e lungo il pavimento. Poi la spinta tra mani e muro, che è orizzontale, dovrà essere trasmessa, lungo la curva, alle altre parti del sistema; e la tangente alla curva, per quanto questa sia arbitraria, non potrà essere orizzontale, se non in qualche punto. Quindi uno sforzo di taglio esiste necessariamente.

Va poi detto che il termine "sforzo di taglio" è di uso tradizionale in altre situazioni: tipicamente quelle di una trave o altro corpo solido in cui una dimensione predomina sulle altre. In tal caso è naturale prendere come curva γ l'*asse* della trave. Se la trave è incastrata in una parete e regge un peso all'altra estremità, lo sforzo di taglio ha un preciso significato: è la corrente di qdm che si trasmette lungo la trave, attraverso ogni sua sezione, per sostenere il peso e "scaricarlo" nel muro al punto d'incastro.

11. Simmetria di $\boldsymbol{\Theta}$

Una proprietà importante di Θ, alla quale accenno solo di sfuggita perché non entrerà in gioco nel seguito, è che si tratta di un tensore *simmetrico*. Il significato è questo: preso un elemento di superficie $\mathbf{n}\,d\sigma$, calcoliamo $\Theta\,\mathbf{n}\,d\sigma$, che sarà un certo vettore. Prendiamo ora un altro elemento di superficie $\mathbf{n}'\,d\sigma$ (con uguale area) parallelo a $\Theta\,\mathbf{n}\,d\sigma$: sarà dunque $\Theta\,\mathbf{n}\,d\sigma = k\,\mathbf{n}'\,d\sigma$, ossia $\Theta\,\mathbf{n} = k\,\mathbf{n}'$, con k reale. Si dirà che Θ è simmetrico se per ogni $\mathbf{n}$ risulta

$$\Theta\,\mathbf{n}' = k\,\mathbf{n}.$$

Può sembrare che la definizione di simmetria in termini di componenti sia più semplice e immediata, ma non è proprio così. Infatti quella definizione è vincolata al SC scelto, e va completata con la dimostrazione che un tensore simmetrico in un certo SC lo è in tutti.

Qui ho voluto far vedere come si possa dare una definizione intrinseca di simmetria; cosa che ne dà una più diretta interpretazione fisica se si pensa alla ddc di qdm (alias tensore degli sforzi). Però che la ddc della qdm sia un tensore simmetrico va dimostrato. Non posso farlo per brevità; mi limito a ricordare che la dimostrazione si basa sulla *conservazione del momento angolare.* [7]

[direzioni principali]

12. La conservazione della qdm

Abbiamo visto che nel caso di grandezze scalari la legge di conservazione si esprime (in forma differenziale) mediante la (6). È naturale chiedersi che cosa diventi la (6) nel caso di grandezze vettoriali, e la risposta è semplice; per es. nel caso della qdm abbiamo

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{div} \Theta = 0. \tag{9}$$

Bisognerebbe però definire la divergenza di un tensore. [7] Questo si può fare in due modi:

– in modo intrinseco, ossia senza coordinate
– più semplicemente introducendo un SC.

Anche qui, la definizione con un SC, apparentemente più semplice, richiede però la dimostrazione che il vettore ottenuto si trasformi correttamente per cambiamento del SC.

È quasi superfluo notare che la (9), ossia la conservazione della qdm, vale solo se ogni porzione di materia del nostro sistema non è soggetta ad altre forze che quelle derivanti dal contatto con le porzioni adiacenti. Infatti il termine $\operatorname{div} \Theta$ dà proprio la misura di quelle forze. La (9) andrà quindi modificata se ci sono altre forze, per es. la gravità.

13. Tensori isotropi: il caso del fluido perfetto

Supponiamo che un tensore abbia la seguente proprietà: comunque scelto $\mathbf{n}$, accade sempre che

$$\Theta\,\mathbf{n} = p\,\mathbf{n} \quad (p \text{ reale})$$

(il che implica subito che Θ è simmetrico). Non è affatto difficile dimostrare, usando la linearità, che il fattore p è lo stesso per qualunque $\mathbf{n}$ (*osservazione di Cauchy*). Un tale tensore è detto *isotropo.*

Esiste un tipo di sistemi continui in cui il tensore degli sforzi è isotropo *in condizioni statiche*: sono i *fluidi.* La definizione di tensore isotropo permette di caratterizzare un fluido dicendo che la ddc di qdm attraverso qualsiasi superficie è sempre *puramente normale.* In altre parole, un fluido non può trasmettere *sforzi di taglio.*

Occorre però notare la restrizione “condizioni statiche.” Infatti i fluidi reali possiedono *viscosità*, che si manifesta proprio con la presenza di forze interne parallele alla superficie di scorrimento. Esempio canonico: la corrente di un fiume ha una velocità che decresce dal centro verso le rive. Questo accade perché la velocità dell’acqua a contatto con la riva deve essere nulla, e può solo crescere con continuità quando ci si sposta verso il centro. Si ha allora uno scorrimento

[7] Si può dire *la* divergenza perché Θ è simmetrico; altrimenti le divergenze sono due.

di uno strato sull'altro: per questa ragione la corrente viene frenata, e l'acqua non può muoversi senza forze esterne (solitamente la gravità).

Un fluido (ideale) privo di viscosità, nel quale quindi la ddc della qdm rimane isotropa anche in condizioni di moto, si dice *perfetto.* [8]

Come si vede, nel caso di un fluido perfetto, o anche per un fluido reale in condizioni statiche, la ddc della qdm è data assegnando una sola grandezza scalare p, che prende il nome di *pressione.* Naturalmente la pressione sarà in generale funzione del punto, ossia variabile da un punto all'altro del fluido.

Di più: è un fatto sperimentale che in un fluido è sempre $p > 0$: una porzione del fluido può solo *spingere* su (ed essere spinta da) quelle adiacenti, ovvero un fluido *non resiste a trazione.*

Per i corpi solidi la situazione si presenta sempre più complicata: non è affatto detto che Θ sia isotropo, e anche se può esserlo in condizioni particolari, niente vieta una pressione negativa: in tal caso di parla di *tensione.*

14. Misura della corrente di qdm: il dinamometro

Così come esiste uno strumento dedicato alla misura della corrente elettrica (l'amperometro), ne esiste uno che misura la corrente di qdm: si chiama *dinamometro.* Tradizionalmente il dinamometro è inteso come strumento per misurare le forze, ma come abbiamo visto forza e corrente di qdm sono la stessa cosa.

Se mai, un problema marginale nasce dalla costituzione del più comune dinamometro: semplicemente una molla fra due ganci. L'allungamento della molla è proporzionale alla forza applicata (almeno nell'ipotesi lineare, ma scostamenti dalla linearità possono sempre essere tenuti in conto *tarando* il dinamometro). Ma è un limite dello strumento così costruito che esso permette di misurare solo forze traenti, non forze prementi: *trazioni*, non compressioni. Nel linguaggio della corrente di qdm, il dinamometro usuale misura solo correnti $\mathbf{I_P}(\Sigma)$ che hanno verso *opposto* a Σ.

A prima vista la situazione sembra analoga a quella di un amperometro a lancetta non a zero centrale, che misura solo correnti positive. Ma c'è una differenza: se ci accorgiamo che la corrente è negativa, dobbiamo solo *invertire* l'amperometro (staccare i puntali e scambiarli); invece nel caso del dinamometro l'accorgimento di rovesciarlo non serve, per la proprietà d'invarianza che abbiamo notato alla fine del §8. È quindi necessario un dinamometro *a zero centrale*, che non è difficile realizzare. Oppure ricorrere a un moderno sensore di forza [o deformazione?] (inglese "strain gauge") che pure può essere montato in modo da consentire l'indicazione di correnti dei due versi.

---

[8] Occorre notare che la terminologia non è uniforme: in alcuni testi un fluido è definito perfetto quando è anche *incomprimibile* (densità costante).

15. Torniamo al filo: fisica in una dimensione

Ci sono molti casi in fisica, e specialmente in meccanica nell'insegnamento elementare, in cui si ha a che fare con problemi essenzialmente *unidimensionali.* Ciò vuol dire che tutti gli aspetti rilevanti di un fenomeno (moti, forze, correnti ...) si svolgono lungo una retta o magari una curva: circonferenza o altre. Limitiamoci pure a una retta, il che semplifica la trattazione matematica.

È abituale in simili casi introdurre un'ascissa lungo la retta, considerare solo le componenti lungo quella retta dei vettori che entrano in ballo (forze, spostamenti, accelerazioni, velocità, campi elettrici ...). Appare quindi inutile il ricorso a strumenti più sofisticati, a cominciare proprio dai vettori: un solo numero reale basta per rappresentare ciascuna grandezza fisica del problema.

Però qui si nasconde un sottinteso che può anche essere pericoloso: che i vettori siano in sostanza *terne di numeri*, quindi fuori posto in un problema unidimensionale, dove solo grandezze *scalari* avrebbero significato. Dico pericoloso perché è la fonte di problemi, come per es. quello di cui abbiamo parlato all'inizio, circa la natura della tensione in un filo. È di questo che bisogna ora trattare.

La distinzione tra scalari, vettori (e anche tensori) è però più profonda, anche da un punto di vista fisico, del modo di rappresentare queste grandezze con uno o più numeri reali. La velocità di un corpo è *intrinsecamente* un vettore, a differenza poniamo dalla densità, che è intrinsecamente uno scalare. La densità di carica può avere segno positivo o negativo, ma questo fatto dipende solo dal sistema, dal punto in cui la si misura, e da nient'altro. Invece la velocità ha anche una *direzione*; questo è vero pure in una dimensione, anche se la direzione si riduce al *verso.*

È importante ricordare che per individuare la velocità di un corpo (anche in una dimensione) abbiamo bisogno di un *riferimento*, che è cosa diversa da un SC: (9) se si ribalta il rif., ossia gli strumenti del nostro laboratorio, la velocità *cambia verso*, la densità di carica *resta invariata.*

Ciò posto, rivediamo quanto detto nel §5. Sulla densità (scalare) w non c'è da aggiungere niente; sulla densità di corrente $\mathbf{j}_W$ basta rilevare che abbiamo ancora a che fare con un *vettore*, ma cambia la (4) perché ora, in una dimensione, non abbiamo più un elemento di superficie $d\sigma$. Se vogliamo, questo si riduce a un punto, ma rimane da specificare un orientamento: quindi al posto di $\mathbf{n}\,d\sigma$ dobbiamo sostituire il vettore unitario $\mathbf{n}$, che può solo avere due versi. La (4) verrà quindi modificata in

$$dW = \mathbf{j}_W \cdot \mathbf{n}\, dt \tag{10}$$

e il significato è ovvio.

---

(9) Una discussione sulla differenza tra riferimento e SC non può trovare spazio qui: rimando a [7].

Quanto alla corrente I_W, non c'è più una superficie Σ e il relativo integrale; possiamo usare direttamente la (10):

$$I_W(\mathbf{n}) = \mathbf{j}_W \cdot \mathbf{n}. \tag{11}$$

È naturale trasformare la (10) nella seguente:

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{j}_W \cdot \mathbf{n}$$

e quindi leggere così la (11):

$$I_W = \frac{dW}{dt}.$$

Ma c'è un "ma": che cos'è la W di cui si fa la derivata?

Conviene ritornare al §5 e all'eq. (4), dove per la prima volta figura dW. Qui dW significa "la quantità di W che attraversa nel tempo dt l'area $d\sigma$." Se però scriviamo una derivata, operiamo uno slittamento di significato: ci deve essere una $W(t)$, ossia una definita quantità di W che varia nel tempo. È per es. ciò che dà significato a scritture come $I = -dQ/dt$, dove Q è *la carica sull'armatura* di un condensatore, e I la corrente uscente. In mancanza, la derivata non ha significato, e quindi ci asterremo dall'impiegarla.

Resta comunque nella (11) la dipendenza dall'orientamento $\mathbf{n}$, com'è giusto: non possiamo dire se una corrente è positiva o negativa se prima non abbiamo fissato un *verso positivo* sulla retta. C'è però un altro punto da chiarire: in una dimensione esiste la distinzione tra corrente e densità di corrente?

Si capisce che se consideriamo un filo come avente una sezione di area finita la distinzione ha pienamente senso: per es. ci possiamo domandare se la densità di corrente sia uniforme in tutta la sezione (cosa che sappiamo non essere vera ad alte frequenze — effetto pelle). Ma in uno schema strettamente 1D di densità di corrente non si può parlare; dunque la distinzione è inutile, o forse errata?

Eppure la (11) indica un'altra differenza fra I e $\mathbf{j}$: la prima è uno scalare, la seconda un vettore. Abbiamo già visto come la differenza vada mantenuta, causa la diversa dipendenza dalla scelta del rif.

L'esempio concreto della corrente elettrica chiarirà meglio la situazione. Supponiamo di avere un circuito (fig. 5a) e concentriamo l'attenzione sul tratto di filo che va dal polo positivo P della batteria al terminale A del resistore. Qui la figura va interpretata non come uno schema elettrico, ma come uno schizzo, sostituto di una fotografia (v. ad es. la discussione in [8]). Immaginiamo il circuito montato su un tavolo; noi l'abbiamo fotografato dall'alto, stando su un lato del tavolo. Fissiamo il verso positivo da P ad A, come indicato dal vettore $\mathbf{n}$: la corrente risulta positiva.

Se cambiamo rif., in concreto passando al lato opposto del tavolo per scattare la foto, vedremo qualcosa come la fig. 5b. Si vede che ora A si trova a sinistra

di P mentre prima era a destra; che il vettore $\mathbf{n}$ — che ha conservato la stessa relazione col circuito — ha cambiato verso. La stessa cosa accade a $\mathbf{j}$, che è un vettore, mentre la corrente I resta invariata anche in segno.
[Ma la corrente non ha un verso?]

Tutto piuttosto ovvio, si dirà. Vero, ma al solito, è servito a preparare il terreno per un caso assai meno ovvio...

16. Tensori in una dimensione

Chi legge avrà già capito che cosa si deve aspettare: il passaggio alla corrente di qdm. Quindi occorre preliminarmente chiarire che cos'è un tensore in una dimensione.

Non c'è molto da dire, perché la definizione rimane la stessa già vista. Piuttosto osserviamo che in una dimensione i vettori hanno una sola componente, e così anche i tensori: tutti questi enti matematici vengono rappresentati, assunto un SC, con un unico numero reale, come gli scalari. Non c'è dunque nessuna differenza?

Non sembra, se abbiamo prima insistito sulla differenza tra uno scalare (la densità di carica) e un vettore (la densità di corrente). Abbiamo visto che la differenza sta nel fatto che uno scalare è definito indipendentemente dal rif., mentre un vettore è legato al rif.: cambia verso se questo viene invertito.

Di passaggio, osservo che tra il caso 3D e quello 1D c'è differenza anche per ciò che si può fare con un rif. Lasciando da parte la possibilità di rif. in moto relativo, in 3D un rif. può essere *ruotato* in vari modi (oltre che traslato); in 1D lo si può solo *ribaltare*, come abbiamo fatto nell'esempio di poco fa. [ribaltamento diverso da riflessione?]

Che cosa accade a un tensore si si ribalta il rif.? Basta pensare alla definizione: un tensore manda un vettore in un vettore. Se si ribalta il rif., entrambi i vettori cambiano verso, e per far questo non occorre cambiare in alcun modo il tensore: lo fa automaticamente, grazie alla linearità:

$$\mathbf{b} = \Theta\,\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad -\mathbf{b} = \Theta(-\mathbf{a}).$$

Si vede dunque che l'azione di un tensore è *indistinguibile* da quella di uno scalare: il vettore $\mathbf{b}$ non può che essere un multiplo (concorde o discorde) di $\mathbf{a}$: $\mathbf{b} = k\,\mathbf{a}$ e k non cambia ribaltando il rif.

Conclusione: in una dimensione *non c'è motivo di distinguere i tensori dagli scalari*: una bella semplificazione!

17. Infine: corrente della qdm in una dimensione

A questo punto potrei quasi evitare di scrivere ciò che segue, che mi pare del tutto evidente. Ma *melius est abundare*... La ddc della qdm è un tensore, ossia uno scalare, che per coerenza con quanto precede chiamerò p, come nel caso dei tensori isotropi in 3D. Può avere i due segni: $p > 0$ significa *compressione*, impossibile con un filo, ma possibile con una molla o meglio con una bacchetta. Invece $p < 0$ è una *trazione*.

Abbiamo già dato a p il nome di *pressione* e così dovremmo continuare a fare; ma nei sistemi 1D è piuttosto in uso il termine *tensione*, come sappiamo. Solo il segno è diverso: se indichiamo con τ la tensione, per definizione $\tau = -p$. Se torniamo all'esempio di §10, fig. 3, nella molla abbiamo $p > 0$, $\tau < 0$; nel filo l'opposto.

In ogni caso, il nostro lungo giro ha finalmente risposto alla domanda del §2: la tensione di una corda *è uno scalare* (o un tensore 1D, se si vuol essere pignoli) e rappresenta la ddc della qdm che si propaga nella corda. La forza che la corda esercita sulla massa appesa è la *corrente* di qdm (un vettore), rispetto a un orientamento che va dalla corda alla massa. La forza che la massa esercita sulla corda è ancora la corrente, ma secondo l'orientamento opposto; è quindi opposta, come insegna la terza legge di Newton.
[didattica?]

Bibliografia

[1] `http://www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de/kpk/Fragen_Kritik/KPK-DPG%20controversy/`

[2] `EPS_council.pdf`

[3] `Expert_opinion_english.pdf`

[4] `Reply_english.pdf`

[5] `http://www.sagredo.eu/KPK`

[6] E. Fabri: "Insegnare relatività nel XXI secolo"; *Quaderno* 16, *LFnS* **38**, suppl. al n. 1 (2005) e `http://www.sagredo.eu/Q16/lez03.pdf`

[7] `http://www.sagredo.eu/lezioni/irg/irg11.pdf`, pag. 11–2.

[8] E. Fabri: "Sulla scarica di un condensatore ..."; *LFnS* **47** (2014), n. 1, pag. 1. In particolare a pag. 5.