

Sul “paradosso” dei due condensatori

Questo scritto è un commento a un recente articolo di V. Iorio [1]. Il pre-sunto “paradosso” dei due condensatori è troppo noto per dover ricordare in che consiste; vale solo la pena di notare che nonostante ciò, continua a essere oggetto di discussione. Il che meriterebbe forse qualche riflessione, ma non in questa sede. Iorio non cita i numerosi lavori sul problema, anche recenti: prende come sua unica fonte teorica uno scritto di McDonald [2] che a quanto ho potuto vedere risulta essere apparso solo in arXiv.

In tutti questi lavori la domanda è una sola: “dove va a finire l’energia che scompare nella scarica?” Ho potuto leggere le seguenti risposte:

- viene dissipata nella resistenza dei conduttori, che non è mai nulla, anche quando è molto piccola
- viene irraggiata, nel modo di dipolo elettrico
- ancora irraggiata, ma in modo di dipolo magnetico.

I diversi autori hanno opinioni diverse, e tendono a fare affermazioni categoriche. Tra questi [2], su cui Iorio si basa, sostiene che l’energia viene irradiata nel modo di dipolo magnetico. A mio parere il lavoro di McDonald, di cui ho appreso l’esistenza solo leggendo quello di Iorio, è criticabile sotto più aspetti, mentre Iorio lo accetta senza problemi.

In un articolo di alcuni anni fa [3] esaminai le varie possibilità, e conclusi che non si può decidere senza una stima dei parametri rilevanti del circuito *reale* (cosa che la gran parte degli autori non fanno). Stime ragionevoli portano alla conclusione che ben difficilmente si ha una significativa perdita di energia per radiazione.

Il lavoro di Iorio è sperimentale, e l’Autore asserisce di aver provato la validità della tesi di McDonald, anche se nella conclusione lascia aperta, in modo poco chiaro, la possibilità di una perdita ohmica. Nell’introduzione si trova un’esposizione del “paradosso,” che contiene qua e là asserzioni ingiustificate. Per es. “si dovrebbero mettere in moto tutti gli elettroni nell’intero Universo.” In realtà Iorio torna anche in seguito sulla “cinetica degli elettroni,” e da ciò che scrive sembra di capire che a suo avviso, almeno durante il transitorio, parte dell’energia la si trovi come energia cinetica degli elettroni. Basterebbe un piccolo calcolo, usando corretti ordini di grandezza, per vedere come quest’idea sia infondata.

Trovo più importante (e più grave) la seguente affermazione: “un sistema costituito da induttanza e capacità è come se fosse un’antenna.” Ne riparleremo.

Nell’esperimento l’Autore ha scelto di lavorare con condensatori di alta capacità (oltre 1 F). Non viene data alcuna ragione di tale scelta, che comporta

ovvie difficoltà pratiche; faccio l'ipotesi che alte capacità fossero necessarie per avere energie misurabili con lo strumento usato. In realtà i condensatori sono ciascuno una batteria di più elementi: nella fotografia sembra di poterne riconoscere 10 a sinistra e 6 a destra, di diverse dimensioni. Quanto alle caratteristiche elettriche, sappiamo solo che sono elettrolitici, con tensione di lavoro che non ha consentito di andare oltre i 7.5 V. Non si sa quale sia la ESR (equivalent series resistance); sembra anzi che l'autore non abbia presente l'importanza di questo parametro.

È evidente la complicazione che consegue nei collegamenti dall'aver usato parecchi elementi in parallelo. Per es. è difficile tenere bassa la resistenza dei conduttori (non si dice niente sulla sezione dei cavi, che dalla foto non sembra particolarmente elevata).

La messa in parallelo dei due gruppi di condensatori è affidata a un teleruttore. Su questo componente essenziale del sistema l'Autore scrive:

“Il teleruttore è azionato tramite un pulsante e il suo funzionamento elettromeccanico assicura un contatto veloce inoltre con resistenza di contatto ohmica trascurabile.”

Sarebbe stato utile avere dati più precisi: da quanto si legge nel seguito non pare che il funzionamento del teleruttore sia molto riproducibile. Inoltre nel contesto di questo esperimento, come vedremo, per poter parlare di “resistenza trascurabile” bisogna scendere a valori difficilmente realizzabili.

* * *

L'esperimento si svolge in diverse fasi.⁽¹⁾ In una prima fase il condensatore C_1 (oppure C_2) viene caricato alla d.d.p. di 7.5 V fornita da una batteria. Mediante il commutatore di carico (fig. 3) il condensatore viene chiuso sul carico di 50Ω attraverso l'analizzatore-integratore, per misurare l'energia accumulata. L'Autore parla di circa 40 J per ciascun condensatore separatamente. C_1 e C_2 hanno uguali capacità (dichiarati 1.33 F).

Nella seconda fase il condensatore carico (poniamo sia C_1) viene chiuso sull'altro scarico, tramite il teleruttore Td. Dopo di che, procedendo come prima, si misura l'energia immagazzinata nel parallelo dei due. I risultati sono riportati in modo un po' vago: si parla di variazioni fra 21.6 J e 25.2 J, senza dare nessuna spiegazione di questa forte variazione. Si conclude assumendo una media di 23 J.

Fin qui niente di nuovo: il risultato era noto e prevedibile. Trovo però utile l'aver verificato che la formula $E = \frac{1}{2} C V^2$ vale abbastanza bene nelle date condizioni sperimentali. Infatti si tratta di condensatori elettrolitici di alta capacità, che vengono fatti lavorare in condizioni estreme: nella fase di scarica di C_1 su C_2 la corrente supera 200 A, come si vedrà in seguito.

⁽¹⁾ I riferimenti alle figure, e relative notazioni, sono quelli di [1].

* * *

La parte interessante comincia ora: secondo l'Autore verrà dimostrato che l'energia mancante è stata irraggiata. Vediamo.

La sez. 3 si apre con un discorso teorico, volto in primo luogo a chiarire che cosa sia un'antenna (secondo l'Autore: ci torneremo). Poi si passa a descrivere il lavoro di McDonald, soprattutto per presentare la formula (2), ripresa da [2], quasi fosse un risultato originale di quell'autore. La potenza irraggiata da un dipolo magnetico oscillante si trova in tutti i libri di elettromagnetismo avanzato, e per arrivare alla (2) occorre solo aggiungere l'espressione del momento di dipolo magnetico di una spira circolare.

L'Autore scrive

“McDonald calcola anche la resistenza di irradiazione [...] il cui valore risulta pari a 30 ohm.”

È vero che McDonald scrive questo, ma ci sono alcune cose da osservare in proposito. In primo luogo, la definizione di resistenza di radiazione data da McDonald non è quella comunemente usata [4] e che ha senso solo per correnti sinusoidali. Per una $I(t)$ generica la definizione di McDonald fornisce una R_{rad} dipendente dal tempo, ed è di utilità discutibile. Ciò ha un corrispettivo nel fatto che — per una data antenna — secondo la definizione usuale la resistenza di radiazione *dipende dalla frequenza*.

Secondo: la (16) di McDonald porta al valore di $30\ \Omega$ solo se si assume che sia $C \simeq a$ (u.e.s.), dove a è il raggio della spira (fig. 4). A titolo di esempio, visto che una u.e.s. di capacità vale circa 1.1 pF, se prendiamo $a = 20$ cm dovrebbe essere $C \simeq 20$ pF: ci sono ben 11 ordini di grandezza dalle C dell'esperimento! Del resto, che sia impossibile una resistenza di radiazione così grande salta agli occhi: per avere un tale valore occorre una *vera antenna*, di dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda emessa. Ma come vedremo fra poco, l'Autore ha misurato una frequenza “irraggiata” al più pari a 10 kHz, cioè una lunghezza d'onda di 30 km.

Terzo: il ragionamento di McDonald contiene un errore (non solo suo) che viene discusso in [3]. Non è vero che l'induttanza se è piccola possa essere trascurata nel calcolo dell'energia irraggiata: è proprio il contrario. La ragione è la seguente.⁽²⁾ Se l'induttanza è piccola saremo in regime aperiodico, e la corrente avrà un andamento composto da due esponenziali: prima un transitorio crescente, con costante di tempo L/R , poi una discesa più lenta verso zero, con costante di tempo RC . È vero che la salita dura molto meno della discesa, ma \ddot{I} è più grande durante la salita rispetto alla discesa, con un rapporto $R^2C/L \gg 1$.

⁽²⁾ Assumo che la chiusura dell'interruttore sia istantanea; in pratica di durata molto minore della costante di tempo L/R . Su quest'ipotesi non è verificata, la fase di salita della corrente non è più dominata dall'induttanza, che può anche risultare trascurabile.

Il rapporto delle potenze irraggiate va come il quadrato di quello delle correnti, ossia come $R^4 C^2 / L^2$; quello delle energie si ottiene moltiplicando per il rapporto dei tempi, e si trova di nuovo $R^2 C / L$. Dunque la fase di salita della corrente è dominante per l'energia irraggiata, e lo è tanto più quanto minore è L .

Ma c'è di più. La formula (5) di McDonald per la potenza irraggiata, riprodotta nella (2) di Iorio, vale per la radiazione di dipolo magnetico emessa da una spira circolare di raggio a . Lo stesso vale, al netto dell'errore già discusso, per la resistenza di radiazione (eq. (16)) di McDonald. Iorio applica disinvoltamente tutto ciò al suo montaggio, dove è ben difficile riconoscere una spira circolare: la foto in fig. 2 mostra un intrico di fili che è impossibile schematizzare con una forma geometrica semplice, tanto meno con una circonferenza di raggio definito.

Segue una frase di difficile interpretazione:

“Sorprendentemente, le misure effettuate sul nostro circuito sono molto vicine al valore teorico previsto, cioè al dimezzamento dell'energia inizialmente accumulata dal primo condensatore.”

Se con questo si vuol dire che le misure già descritte danno all'incirca il valore corretto per il rapporto tra l'energia iniziale assorbita da C_1 durante la carica e quella rimasta sul parallelo dopo la chiusura di Td, siamo d'accordo. Se invece l'Autore crede di avere con ciò dimostrato che l'energia mancante è stata irraggiata, non posso consentire. Vediamo se la parte finale dell'articolo può illuminarci in proposito.

* * *

Qui vengono descritte altre due misure. Per mezzo di una piccola resistenza ($1\text{ m}\Omega$, se capisco bene) è stato studiato l'andamento della corrente fra i due condensatori subito dopo la chiusura di Td: la fig. 5d ne mostra il grafico. Purtroppo nella figura non ci sono indicazioni circa le scale, né in ascissa né in ordinata; bisogna quindi affidarsi a ciò che è detto nel testo. Si legge che si tratta di

“un impulso di 220 ampere ma sono stati misurati impulsi anche molto maggiori.”

Non c'è nessun commento su questa forte variabilità della corrente di picco: forse la resistenza del circuito cambia da una prova all'altra, per una variazione nella resistenza dei contatti del teleruttore? Poi

“Normalmente, [?] come si vede anche dalla figura, [?] l'impulso si riduce dell'80% già nei primi 50 ms.”

Fermiamoci un momento. Se il dato è attendibile, se ne deduce una costante di tempo di circa 30 ms (questo Iorio non lo dice). Con la capacità di 0.67 F (C_1 e C_2 in serie) si ricava una resistenza $R \simeq 50\text{ m}\Omega$. Un'altra stima della resistenza del circuito la ottengo dividendo la d.d.p. iniziale per la corrente di picco: si trova $7.5/220 = 34\text{ m}\Omega$. Non mi stupisco della differenza, visto che la

costante di tempo è solo una stima a occhio e la corrente di picco varia da una prova all'altra; la concordanza mi sembra anzi più che accettabile. In ciò che segue prenderò $40\text{ m}\Omega$ come stima di questa resistenza.

Ancora Iorio:

“Al termine del nostro studio abbiamo anche voluto verificare che l'impulso elettromagnetico calcolato da McDonald fosse presente e quindi abbiamo posto il solenoide [descritto in precedenza] fisicamente al centro del nostro circuito, galvanicamente isolato da esso [...] La fig. 5b e la 5c [...] mostrano impulsi da 11 kHz e 6 kHz rispettivamente. [...] La maggior parte degli impulsi si è verificata nell'intorno dei 6 kHz per cui abbiamo azzardato una stima del coefficiente di autoinduzione o induttanza complessiva residua del circuito di misura di circa 1 nH.”

Osservo quanto segue. L'Autore parla più volte di “antenna” riferendosi a una semplice bobina di 143 spire, lunga una trentina di cm e con diametro 7.5 cm. Questa “antenna” viene posta “al centro del circuito.” È del tutto improprio parlare di antenna in tali condizioni, con frequenze di pochi kHz. Ha anche poco senso parlare di “radiazione”: si tratta invece di una semplice induzione e.m.

Non viene data nessuna spiegazione della forte variabilità della frequenza osservata, quando (si presume) le condizioni geometriche ed elettriche dell'apparato non saranno cambiate da una prova all'altra.

Il valore indicato di L è quello che con la capacità di 0.67 F dà una frequenza di risonanza di 6 kHz. Purtroppo però con questi valori di L , C e col valore sopra stimato di R il circuito risulta fortemente aperiodico, per 5 ordini di grandezza oltre il valore critico. Quindi le frequenze osservate con l'analizzatore di spettro restano inspiegate. D'altra parte un'induttanza così piccola è impossibile per un circuito di quelle dimensioni: mi aspetterei un valore almeno 100 volte maggiore. Ma allora da dove viene l'oscillazione a 6 oppure 11 kHz? È impossibile capirlo. Nell'insieme, ci sono varie incongruenze su cui è inutile azzardare spiegazioni, senza poter effettuare verifiche con l'apparato sottomano.

L'Autore non si è accorto delle molte cose che non tornano, quindi non ha pensato a nessuna verifica e analisi delle sue misure. Nella conclusione scrive tranquillamente:

“[...] è stato possibile verificare che il circuito di fig. 1 durante la commutazione [...] emette realmente forti segnali elettromagnetici [...] Questo segnale trasporta una parte dell'energia accumulata da C_1 molto vicina alla metà di quella precedentemente accumulata da questo capacitore.”

Asserzione del tutto ingiustificata: a parte quanto già detto, non si vede su che base si possa parlare di “forti” segnali, dal momento che non si dice niente dell'ampiezza del segnale letto. Non è affatto provato che si tratti di energia irraggiata, visto che tutte le misure sono state fatte solo nelle immediate vicinanze del circuito, e non già nella zona delle onde. Come già detto, la relazione col

modello di una spira circolare è infondata. A mio parere quindi non è possibile presentare l'esperimento come una prova dell'emissione via onde e.m. dell'energia "perduta" nella scarica.

Al contrario, seguendo la discussione in [3] è facile convincersi che nelle condizioni date la radiazione e.m. è per vari ordini di grandezza inferiore alla dissipazione ohmica. Controprova: prendendo i valori misurati o stimati per la corrente di picco, la resistenza ohmica, la costante di tempo, si vede che l'energia dissipata per effetto Joule è attorno a 30 J: vicina a quella "perduta."

Se un insegnamento si può ricavare dal lavoro di Iorio, è che non basta disporre di strumenti che costano migliaia di dollari per fare buona fisica.

- [1] V. Iorio: *Giornale di Fisica* **58** (2017) 217.
- [2] K.T. McDonald: arXiv:physics/0312031v1 [physics.class-ph].
- [3] E. Fabri: *La Fisica nella Scuola* **47** (2014) 1. Una versione "lunga" si trova in
<http://www.sagredo.eu/articoli/condensatore-1.pdf>
- [4] S.J. Orfanidis: *Electromagnetic Waves and Antennas* (Rutgers University, Newark 2014).