E. Fabri *ottobre 2015*

Su riferimenti e simultaneità – note sparse

Riferimento (inerziale) – alcuni dettagli

Come sappiamo, intendo con riferimento (rif.), sottinteso inerziale (RI), un *corpo rigido* con associati tutti i necessari strumenti di misura. Non mi soffermo a ridefinire il significato di *inerziale*; osservo solo che dal punto di vista della RG si deve intendere come inerziale un rif. *in caduta libera* (T&W preferiscono dire "in volo libero").

La differenza sta solo nella possibilità, nel caso più generale, che esistano *forze di marea*, che invaliderebbero il principio d'inerzia. È noto che la difficoltà si supera restringendo il rif. ad avere una *piccola estensione*, sia in senso spaziale, sia temporale, in modo che l'effetto delle forze di marea possa essere reso piccolo a piacere.

Per avere un'immagine concreta di un rif. nel senso detto conviene pensare a qualcosa di non terrestre: per es. a un'astronave che viaggia a motori spenti (o una stazione spaziale, se preferite). (1) Se si trova lontana da qualsiasi corpo celeste, è un RI anche nel senso newtoniano; se invece l'azione gravitazionale di qualche stella o pianeta non è trascurabile, sì che il suo moto non è rettilineo uniforme, sarà comunque in volo libero e sarà quindi ancora inerziale nel senso di Einstein.

Invarianza per traslazioni spaziali e temporali

Un'ipotesi che è necessario fare, almeno finché si sta in RR, è che le leggi fisiche valide nel nostro rif. siano *invarianti per traslazioni* (spaziali e temporali).

Invarianza per traslazioni spaziali significa, detto in termini concreti, che se nel nostro rif. realizziamo *due copie* di un esperimento, che differiscono tra loro solo per aver *traslato nello stesso modo* tutti gli apparecchi e strumenti di misura, i risultati dei due esperimenti saranno indistinguibili, salvo per la traslazione. In altri termini, la lettura dei risultati non permette di scoprire *dove esattamente* l'esperimento è stato condotto.

L'invarianza per traslazioni temporali è ancora più semplice: significa solo che un esperimento ripetuto *nelle stesse condizioni* domani o fra un anno darà gli stessi risultati. Quindi il risultato non permette di capire *data e ora* dell'esperimento.

Ora si capisce perché è meglio una stazione spaziale che non la Terra: sulla Terra l'invarianza per traslazioni spaziali non è assicurata, per varie ragioni, ma

(1) Occorre anche che la stazione non ruoti: dovremo quindi escludere quella di *2001 Odissea nello spazio.*

soprattutto a causa della gravità. Senza contare che a rigore un rif. solidale alla Terra non è inerziale, per due motivi: ancora la gravità, poi la rotazione diurna. (Non è invece un disturbo il moto orbitale, che è un volo libero.)

L'invarianza per traslazioni spaziali viene spesso descritta come *omogeneità dello spazio*; quella per traslazioni temporali come *omogeneità del tempo*. Si parla anche di *isotropia* dello spazio, connessa con un'altra invarianza: quella per *rotazioni*. Non dico di più, perché non ci servirà.

Principio di relatività e riferimenti ampliati

L'enunciato consueto del PR è che *non ci sono differenze osservabili* tra due distinti RI. Vale il *principio del taccuino*: la lettura del taccuino (logbook) di un esperimento non permette di decidere in quale rif. è stato eseguito.

Occorre però chiarire un punto. In questo discorso ciascun rif. è inteso come un laboratorio *chiuso*: è sottratto a influenze esterne, e non si cerca di "guardare fuori." Gli esperimenti di cui si tratta sono fatti completamente all'interno di uno spazio limitato, che è il nostro laboratorio.

Per procedere oltre sarà però necessario allargare il concetto di rif., ammettendo anche la possibilità di osservazioni *all'esterno*. In altre parole, il rif. verrà ampliato fino a includere uno spazio esteso quanto occorre per poter osservare fenomeni che avvengono anche a grande distanza. Senza di questo, non potremmo fare astronomia, astrofisica, cosmologia...

Si capisce che l'ampliamento non potrà essere letterale: non possiamo tirare un reticolo rigido fino al Sole, e tanto meno fino a includere tutta la Galassia, ecc. Né possiamo realmente disporre in tutto questo spazio una batteria di orologi sincronizzati, come avevamo fatto nel nostro rif. originario. Che cosa vuol dire allora questo ampliamento?

Il principio di uniformità

A farlo bene, il discorso non sarebbe né semplice né breve, quindi occorre limitarsi a un cenno sommario. Il primo passo sta nell'assumere valide anche a distanza le stesse leggi fisiche che abbiamo costruito lavorando nel nostro rif. originario. Nell'effettivo processo storico questo è realmente accaduto, per es. quando Galileo ha deciso di studiare i caratteri della superficie lunare applicando lì le stesse leggi dell'ottica che sapeva valide sulla Terra.

Ma poi tutta l'astronomia e l'astrofisica hanno seguito questa strada: per Newton i satelliti di Giove si muovono attorno al pianeta secondo le stesse leggi valide per la Luna attorno alla Terra e per tutti i pianeti attorno al Sole. Più tardi le stesse idee verranno applicate alla rotazione della Galassia. La costituzione ed evoluzione delle stelle verranno studiate usando tutta la fisica (ottica, fisica nucleare, termodinamica, mecc. quantistica) che si è trovata valida sulla Terra. Addirittura, oggi misuriamo la distanza di galassie lontanissime basandoci sul principio che i livelli di energia degli atomi in quelle galassie siano gli stessi di quelli nei nostri laboratori, quindi sono le stesse le righe di assorbimento della luce; quindi se noi osserviamo differenze nelle lunghezze d'onda, la spiegazione può solo essere il *redshift cosmologico*, ecc.

Quest'idea la denominiano *principio di uniformità* (PU). S'intende che il PU, come tutti gli altri principi che ho invocato finora, non è da prendere come dogma o principio *a priori*: sono *principi guida*, essenziali per orientarci nel mondo dei fenomeni; ma dobbiamo sempre tenere aperto uno spiraglio alla possibilità che un giorno se ne possa scoprire una qualche non validità, in condizioni particolari o estreme.

Ancora ampliamento

Per poter effettuare l'ampliamento che abbiamo in mente, dobbiamo servirci del PU non solo in senso *locale*, come accade per es. quando diciamo che una stella funziona con le stesse leggi che valgono sulla Terra. Dobbiamo invece assumere che l'uniformità sia *globale*, in uno spazio che include il nostro rif. iniziale e si estende in una regione anche molto più vasta. Esempio classico è la *propagazione rettilinea della luce*, che usiamo non solo per spiegare e prevedere le eclissi, ma anche per misurare le distanze stellari col metodo della *parallasse annua*. A noi serve soprattutto, accanto alla propagazione rettilinea, che la *velocità della luce* sia *costante* in tutto il rif. esteso, perché su questo baseremo la connessione tra le misure di tempo e quelle di distanza (*metodo radar*).

Altra assunzione essenziale, anche se spesso sottintesa, è la validità della *geometria euclidea* in tutto il rif. esteso. Ne segue che in uno spazio-tempo curvo in generale l'ampliamento del rif. non sarà possibile: in RG i rif. possono essere soltanto *locali*.

Un'obiezione che può venire in mente è questa: come si può parlare di un rif. esteso *rigido*? Non è certo possibile (l'abbiamo già detto) realizzare un'intelaiatura, un traliccio, che arrivi da qui fino al Sole, o peggio fino agli estremi della Galassia. Dunque?

Risposta: non occorre il traliccio, che del resto non potrebbe essere davvero rigido, neppure approssimativamente, su una scala così estesa. (Senza contare che la stessa RR pone un limite alla rigidità dei corpi, visto che le onde elastiche non possono mai avere velocità maggiori di c.) Basta però che con misure a distanza, eseguite con segnali luminosi, si possa verificare che le distanze della varie parti del rif. rimangono invariate. O meglio che si possa, con opportuni sistemi di correzione, mantenere le deviazioni entro limiti accettabili per le misure che servono. A questo non esistono obiezioni di principio, e quindi *in questo senso* è possibile pensare a un rif. rigido anche molto esteso.

Leggi di trasformazione

L'ampliamento dei rif. apre la strada a una possibilità: si potrà studiare *uno stesso* fenomeno (o esperimento) *da due rif. diversi.* In particolare, potremo eseguire un esperimento nel rif. A (inteso come laboratorio in senso stretto) ma osservarlo (descriverlo, eseguire misure) anche dal rif. B.

Nasce allora il problema: se misuriamo una data grandezza dell'esperimento da entrambi i rif., non c'è ragione di aspettarsi di trovare lo stesso risultato. Esempi: velocità, impulso, forza, campo elettrico o magnetico... Questo potrà accadere per particolari grandezze, come la massa, la carica elettrica ... e le diremo *invarianti*; ma in generale i valori misurati cambieranno, ed è naturale chiedersi che relazione c'è tra le misure in A e quelle in B. Più esattamente, ci chiediamo se si può dare la *legge di trasformazione.*

La più famosa legge di trasf. sono le *trasformazioni di Lorentz*, che dicono come cambiano le coord. spazio-temporali *di un dato evento* passando da un rif. a un altro. Un'altra legge di trasf. è la cosiddetta "composizione delle velocità": termine assai infelice, perché suggerisce una certa forma della trasf. (la somma vettoriale) che è valida nella fisica galieiana (newtoniana) ma non in RR. Il termine corretto è "legge di *trasf.* della velocità."

Orologi e sincronizzazione

Supponiamo di aver disposto vari orologi in punti diversi del nostro rif. ampliato. È facile verificare che essi sono in quiete relativa, ossia che le loro distanze non cambiano, semplicemente controllando che il tempo tra andata e ritorno di un impulso radar rimanga sempre lo stesso. (Si noti che questo richiede misure fatte su *un solo orologio* per volta.)

Il secondo passo da fare è assicurarsi che i vari orologi marcino *allo stesso ritmo.* Anche questo è facile: inviamo dall'orologio A due impulsi, separati da un intervallo Δt (secondo le letture di A): basterà verificare che i tempi di arrivo dei due impulsi all'orologio B siano anch'essi separati dello stesso Δt, secondo le letture di B. Se così non fosse, correggeremo la marcia di uno dei due orologi.

Il terzo passo è la *sincronizzazione* dei due orologi. Si procede così: un impulso viene inviato da A a B e riflesso istantaneamente ad A. Siano t_1, t_3 i tempi segnati da A alla partenza e al ritorno dell'impulso; t_2 il tempo segnato da B quando riceve e rinvia l'impulso. Diciamo che B è sincronizzato con A se t_2 è *medio aritmetico* fra t_1 e t_3. Se così non è, si deve correggere lo *zero* di B (non la marcia!) in modo che la condizione sia soddisfatta. La precedente verifica che i due orologi sono in quiete relativa, insieme con l'invarianza per traslazioni temporali, assicurano che la sincronizzazione si manterrà anche a tempi successivi.

Questo metodo di sincronizzazione, basato sull'invio d'impulsi luminosi, si fonda sull'ipotesi che la velocità della luce sia sempre e ovunque la stessa, in qualsiasi direzione. Si chiama perciò *sincronizzazione alla Einstein.*

Procedendo come detto possiamo sincronizzare vari orologi B, C, ... con A. Ma sorge la domanda: B, C, ... saranno sincronizzati tra loro? Se accettiamo la proprietà della luce appena enunciata, insieme con la rigidità del rif., la cosa segue necessariamente. [2]

Punti ed eventi

Non è male precisare alcune cose, anche per chiarire la notazione che sto per usare. Il concetto di evento in relatività è tutto sommato semplice: è un *punto dello spazio-tempo*, ossia l'astrazione di un fenomeno ben localizzato nello spazio e nel tempo. L'astrazione consiste nel fatto che del fenomeno trascuro tutto, tranne la sua localizzazione.

In questo senso un evento ha carattere *intrinseco*, ossia non dipendente dalla scelta di un rif. Una volta adottato un rif., e in esso un SC (sistema di coordinate), all'evento sarà associata una quaterna di reali (t, x, y, z), che naturalmente cambierà quando si cambia SC o rif. Nel seguito gli eventi verranno indicati con lettere maiuscole *tonde* (*roman*), eventualmente con indici.

Un *punto* è leggermente più complicato da definire. Si tratta ora dell'astrazione di un *oggetto* o *corpo materiale*, di dimensioni trascurabili. Un oggetto "vive" nello spazio-tempo, ha una *storia*, che è rappresentata da una curva (di tipo tempo o al limite di tipo luce) detta *linea oraria* oppure *linea d'universo* (ma io preferirò la prima dizione). Anche una linea oraria, come un evento, è *intrinseca*; può essere rappresentata in qualunque rif., e cambia forma (ed equazioni, se usiamo delle coordinate) se cambiamo rif.

Ne segue che è corretto indicare un punto e quindi la linea oraria sempre con lo stesso simbolo, anche quando si cambia rif. Userò un carattere di tipo *corsivo*, ma non il consueto *italic*: piuttosto caratteri più elaborati, come questo: $\mathcal{A}$.

Va ancora ricordato che le linee orarie sono *parametrizzate*: ciò significa che ad ogni punto dello spazio-tempo sulla linea è associato un valore del parametro, che per le linee di tipo tempo sarà di regola il *tempo proprio.* In termini più concreti, l'oggetto $\mathcal{A}$ va sempre pensato come dotato di un suo proprio *orologio*, che batte appunto il tempo proprio di $\mathcal{A}$.

Capiterà anche di parlare di "punto $\mathcal{A}$ appartenente al rif. K, o più semplicemente "punto $\mathcal{A}$ di K." Ciò significa che il punto $\mathcal{A}$ è *fermo* rispetto a K.

[2] Esiste un dibattito su questi punti, legato al fatto che a rigore non c'è modo di verificare che la velocità della luce sia la stessa in andata e ritorno fra due punti. Non insisto, e mi limito a dire che a mio modo di vedere la detta proprietà della sincronizzazione alla Einstein può essere assunta come fatto sperimentale.

Simultaneità di due eventi

Fissato un rif. K, consideriamo due eventi E_1, E_2 che avvengono in due punti *diversi* P_1, P_2 di K. Che cosa significa dire che i due eventi sono simultanei? Se abbiamo due orologi sincronizzati in P_1, P_2, la risposta è banale: lo sono se i tempi t_1, t_2 segnati dai due orologi in corrispondenza con gli eventi sono uguali.

Ma esiste un'altra definizione, che in certi casi può riuscire più utile perché non fa uso di orologi. Sia $\mathcal{Q}$ il punto medio del segmento P_1P_2: dico che E_1, E_2 sono simultanei se due lampi di luce, emessi in coincidenza con gli eventi, arrivano *insieme* in $\mathcal{Q}$. Mi sembra superfluo dare una dimostrazione.

La definizione appena vista può anche essere estesa a eventi non simultanei, per dare agli eventi un *ordinamento temporale* (sempre relativo a un fissato rif.): dico che E_1 *precede* E_2 se il lampo emesso insieme a E_1 arriva in $\mathcal{Q}$ *prima* di quello emesso insieme a E_2.

Relatività della simultaneità

Tutto quanto precede era in realtà preparatorio a questo argomento, che ora cercheremo di discutere per bene. È tradizione consolidata presentare l'argomento con l'esempio "treno-stazione": due lampi che partono "simultaneamente" dagli estremi del treno. Si tratta di vedere se questa simultaneità vale nell'uno o nell'altro rif.: quelli del treno e della stazione.

Va detto che l'esempio "treno-stazione," a quanto pare dovuto ad Einstein, non si trova nell'articolo del 1905. Lì la rel. della simultaneità è ricavata in un altro modo, che non ho capito. L'idea del treno compare invece nella cosiddetta "esposizione divulgativa." (3) La espongo seguendo da vicino Einstein, solo adottando la terminologia moderna.

Abbiamo un treno che corre lungo un binario rettilineo, a velocità costante. Indicherò con T il rif. del treno. C'è poi la banchina di una stazione S, sulla quale (come sul treno) disporremo opportuni strumenti di misura. A un certo istante il fulmine colpisce due punti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ della banchina (non "lo stesso" fulmine, ma "il" fulmine). Da $\mathcal{A}$ e da $\mathcal{B}$ partono due lampi di luce (4) che raggiungono simultaneamente il punto medio $\mathcal{M}$ del segmento $\mathcal{A}\mathcal{B}$. Questo può essere deciso senza problemi, come lo sono sempre i confronti tra eventi che avvengono nella stessa posizione spaziale. Dato che la velocità della luce è la stessa nei due versi, possiamo quindi essere certi che i lampi sono anche stati emessi simultaneamente

(3) *Relatività – esposizione divulgativa* (Bollati–Boringhieri).

(4) Non è corretto dire, come si trova spesso, due "raggi." È vero che Einstein scrive "Lichtstrahlen," ma il tedesco "Strahl" ha un significato più ampio dell'italiano "raggio": significa anche "fulmine," "saetta." In poesia anche nel senso di "freccia," e mi viene in mente Metastasio: "non si trattien lo strale / poi che dall'arco uscì." Il significato di "raggio" (di luce) in fisica è puramente geometrico: percorso della luce.

(senza neppure bisogno di consultare gli orologi posti in $\mathcal{A}$ e in $\mathcal{B}$). Chiamerò $\mathrm{E}_{\mathcal{A}}$, $\mathrm{E}_{\mathcal{B}}$ gli eventi di emissione dei due lampi. La fig. 1 mostra la situazione nel rif. S: R è l'evento "ricezione in $\mathcal{M}$ dei due lampi.

Consideriamo ora i due punti $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$ del treno che agli eventi di emissione dei lampi si trovano a coincidere con $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, e sia $\mathcal{M}'$ il loro punto medio sul treno. Ci chiediamo: gli eventi $\mathrm{E}_{\mathcal{A}}$, $\mathrm{E}_{\mathcal{B}}$ saranno simultanei anche nel rif. T del treno? Einstein afferma che la risposta è negativa, e lo dimostra come segue.

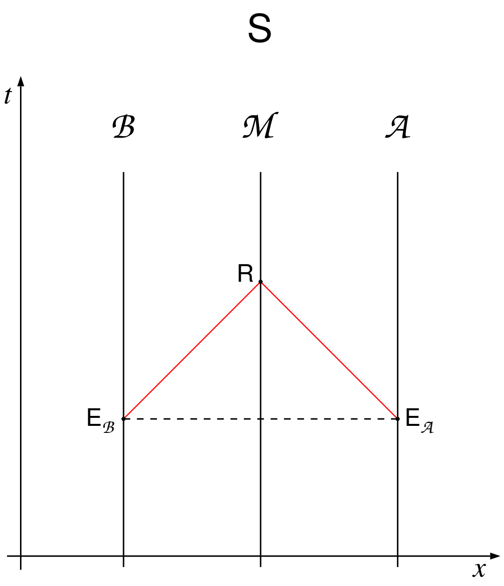

fig. 1

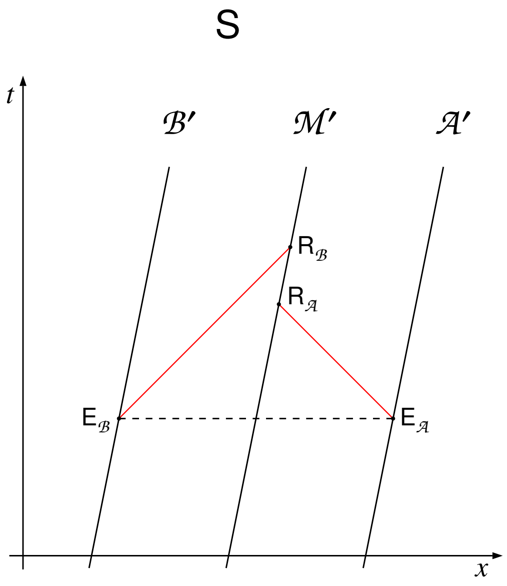

fig. 2

La fig. 2 mostra il moto (linee orarie) dei punti $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{M}'$, nonché le linee orarie (in rosso) dei lampi emessi in $\mathrm{E}_{\mathcal{A}}$, $\mathrm{E}_{\mathcal{B}}$, sempre secondo le misure del rif. S. Dato che $\mathcal{M}'$ si muove verso destra, e coincideva con $\mathcal{M}$ all'istante (in S) di emissione dei lampi, il lampo emesso in $\mathrm{E}_{\mathcal{B}}$ impiegherà per raggiungerlo più tempo che per raggiungere $\mathcal{M}$, che è fermo. Per la stessa ragione invece il lampo emesso in $\mathrm{E}_{\mathcal{A}}$ impiegherà meno tempo, visto che $\mathcal{M}'$ "gli viene incontro." Pertanto l'evento $\mathrm{R}_{\mathcal{B}}$ (arrivo in $\mathcal{M}'$ del lampo emesso in $\mathrm{E}_{\mathcal{B}}$) *segue* l'evento $\mathrm{R}_{\mathcal{A}}$.

Questa successione temporale dei due eventi, che abbiamo stabilita in S, vale anche in T, perché può essere constatata con un unico orologio posto in $\mathcal{M}'$, quindi fermo in T.[5] Di conseguenza, in base alla definizione di simultaneità data in precedenza, gli eventi $\mathrm{E}_{\mathcal{A}}$, $\mathrm{E}_{\mathcal{B}}$ *non sono simultanei* in T: $\mathrm{E}_{\mathcal{A}}$ *precede* $\mathrm{E}_{\mathcal{B}}$.

[5] Questa osservazione non si trova nel libro di Einstein: evidentemente la riteneva ovvia.

La questione del punto medio

C'è un punto che Einstein non considera, ma merita una breve discussione. Il punto $\mathcal{M}'$ è stato definito come punto medio di $\mathcal{A}'\mathcal{B}'$. Questi sono tutti punti del rif. T: ciò è necessario per poter poi applicare la definizione di simultaneità. Ma nel ragionamento che precede abbiamo dato per scontato che $\mathcal{M}'$ coincida a un certo istante col punto medio $\mathcal{M}$ di $\mathcal{A}\mathcal{B}$ (questi sono punti di S): infatti è su questa base che abbiamo potuto stabilire la successione temporale degli eventi $\mathrm{R}_\mathcal{A}$, $\mathrm{R}_\mathcal{B}$. Che cosa ci garantisce che la proprietà di essere punto medio sia invariante? (6)

La risposta è: l'invarianza per traslazioni. I due segmenti $\mathcal{A}'\mathcal{M}'$ e $\mathcal{M}'\mathcal{B}'$ di T hanno uguale lunghezza, e differiscono solo per una traslazione: allora anche i due segmenti di S con cui essi coincidono a uno stesso istante di S (siano $\mathcal{A}\mathcal{N}$ e $\mathcal{N}\mathcal{B}$) debbono essere uguali: $\mathcal{A}\mathcal{N} = \mathcal{N}\mathcal{B}$, quindi $\mathcal{N}$ è il punto medio $\mathcal{M}$ di $\mathcal{A}\mathcal{B}$.

Di nuovo il treno, da un altro punto di vista

Può apparire artificioso il ricorso ai due fulmini "simultanei," che sono necessari nell'argomento di Einstein. Si può allora riformulare l'argomento in modo un po' diverso.

Abbiamo il solito treno (rif. T) e indichiamo ancora con $\mathcal{A}'$ la testa, con $\mathcal{B}'$ la coda. Dal centro $\mathcal{M}'$ del treno facciamo partire due lampi, che viaggiano in sensi opposti, e naturalmente raggiungono simultaneamente la testa e la coda (fig. 3). L'evento emissione sia E, gli eventi "ricezione in $\mathcal{A}'$ e in $\mathcal{B}'$" siano risp. $\mathrm{R}_\mathcal{A}$ e $\mathrm{R}_\mathcal{B}$. (7) Vogliamo dimostrare che $\mathrm{R}_\mathcal{A}$ e $\mathrm{R}_\mathcal{B}$ *non sono simultanei* nel rif. S della stazione.

La fig. 4 mostra la situazione nel rif. S. Le linee orarie di $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{M}'$ sono rette oblique, tra loro parallele. La retta $\mathcal{M}'$ è equidistante dalle altre due, per la ragione già discussa: la questione del punto medio. Le linee orarie dei lampi sono indicate in rosso, ed è ovvio, anche senza fare calcoli, che i tempi di $\mathrm{R}_\mathcal{A}$, $\mathrm{R}_\mathcal{B}$ sono diversi: in S l'evento $\mathrm{R}_\mathcal{B}$ *precede* $\mathrm{R}_\mathcal{A}$.

Volendo essere più rigorosi, si ragiona così. Tracciamo una retta orizzontale per E, che interseca $\mathcal{A}'$ in $\mathrm{E}_\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}'$ in $\mathrm{E}_\mathcal{B}$. Questi sono due eventi in S simultanei con E, che coincidono spazialmente coi punti $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$. Le linee orarie

(6) Il dubbio è lecito, dal momento che sappiamo che le lunghezze non sono invarianti. In realtà una volta stabilita la contrazione di Lorentz, che è per un fattore costante, il dubbio si risolve: tanto il segmento $\mathcal{A}'\mathcal{B}'$, quanto le due metà $\mathcal{A}'\mathcal{M}'$ e $\mathcal{B}'\mathcal{M}'$ vengono contratte per un fattore γ, quindi la metà rimane la metà. Ma qui non vogliamo far uso della contrazione di Lorentz!

(7) I nomi di questi eventi sono stati già usati, ma non ci si può confondere: stiamo descrivendo un esperimento del tutto diverso.

dei lampi partono da E e sono a 45°; i segmenti $EE_{\mathcal{A}}$, $EE_{\mathcal{B}}$ sono uguali, ma l'angolo in $E_{\mathcal{B}}$ è acuto, mentre quello in $E_{\mathcal{A}}$ è ottuso: tanto basta per assicurare che $E_{\mathcal{A}}R_{\mathcal{A}} > E_{\mathcal{B}}R_{\mathcal{B}}$. La stessa relazione vale per le altezze, che misurano le differenze dei tempi (in S) tra $E_{\mathcal{A}}$ ed $R_{\mathcal{A}}$, tra $E_{\mathcal{B}}$ ed $R_{\mathcal{B}}$ rispettivamente.

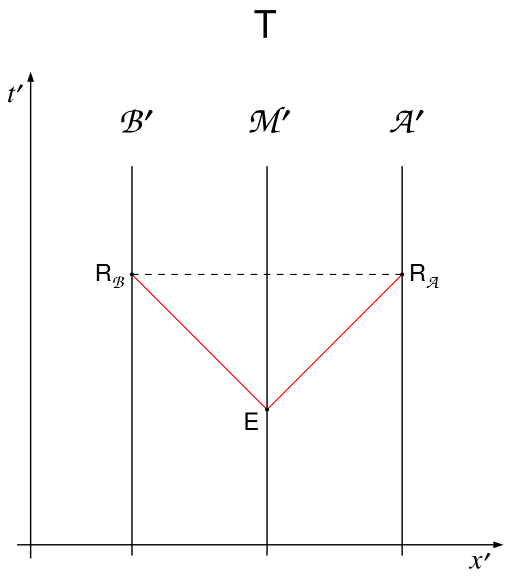

fig. 3

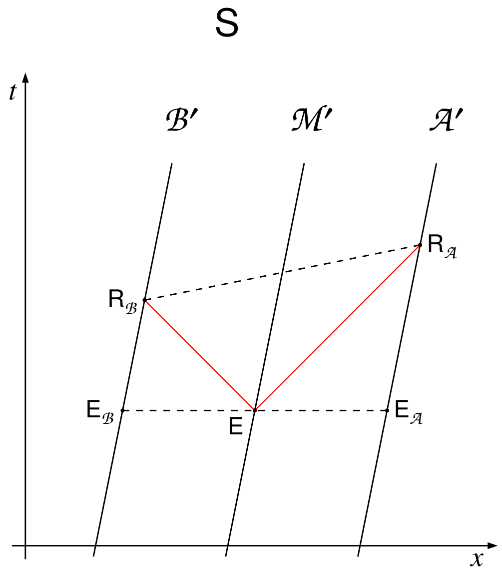

fig. 4

Euclide o Minkowski?

Nell'uso dei diagrammi spazio-tempo possono sorgere dei dubbi, quando si fanno ragionamenti geometrici. Un esempio è quello che abbiamo appena fatto, dove abbiamo ragionato su angoli, triangoli, lunghezze dei lati...

Ci si può chiedere: un diagramma (x, t) rappresenta lo spazio-tempo (con due dimensioni spaziali soppresse) e noi sappiamo che nello spazio-tempo non vale la geometria di Euclide, ma quella di Minkowski. Come può essere lecito parlare di angoli di 45°, di segmenti uguali, di altezze ... insomma di tutto l'armamentario di base della geometria euclidea?

La risposta richiede una riflessione sul significato di quei diagrammi. Consideriamo ad es. le fig. 3 e 4 qui sopra, che mostrano la stessa situazione sperimentale "vista" da due diversi rif.: T ed S.

Un parentesi sul verbo "vedere"

Non sarebbe consigliabile usare in questi discorsi la metafora visiva: l'uso di verbi come "vedere" rischia di orientare chi legge verso un'interpretazione soggettivista, o quanto meno verso l'idea che si stia parlando di ciò che si potrebbe misurare servendosi della luce che si propaga dai vari oggetti ai nostri strumenti. Il che porterebbe con sé la considerazione che la luce impiega un certo tempo, di cui si dovrebbe tener conto, ecc.

Invece non si deve pensare niente di tutto ciò: quando si dice "vista da un certo rif." si vuole solo riassumere in una parola l'insieme delle misure che su quel certo fenomeno verranno fatte con gli strumenti di quel rif. Non c'entrano gli occhi di un "osservatore" né la luce che si propaga. Tuttavia il rischio di cui sopra, quando si parla a ragazzi alle prime armi, è così forte che consiglio vivamente di evitare qualunque metafora e qualunque parola che possa condurre in quella direzione.

Ma quando si parla "tra noi," tra persone che hanno un adeguato addestramento e sufficiente pratica dei trabocchetti linguistici, ci si può permettere una maggiore libertà. Dato che in certi casi evitare la metafora visiva diventerebbe complicato e obbligherebbe a giri di parole contorti, non mi sembra il caso di essere così rigidi. Resta però il caldissimo avvertimento sulle cautele da usare in ambito didattico.

Dicevamo ...

Se proviamo a eseguire misure su queste figure, scopriamo cose che non è immediato capire. Avverto che le figure sono state fatte con la massima cura, per cui le misure sono da prendere sul serio.

Per esempio, se misuriamo le distanze sull'asse x tra le intersezioni delle rette $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{B}'$ con l'asse, troviamo che la distanza in fig. 3 è leggermente maggiore che in fig. 4. Questo è giusto, a causa della contrazione di Lorentz: stiamo proprio misurando la distanza tra due punti ($\mathcal{A}'$ e $\mathcal{B}'$) prima nel rif. in cui i due punti sono fermi, poi in quello in cui si muovono con una certa velocità v. Dobbiamo aspettarci che nel secondo caso la distanza risulti ridotta per un fattore γ.

In tutte le figure è stato assunto $v = 0.2$, per cui $\gamma \simeq 1.02$: ne segue che la distanza in fig. 4 deve essere del 2% più corta che in fig. 3, e così è.

Per inciso, se facciamo la stessa misura per le fig. 1 e 2, troviamo che in quel caso le distanze sono uguali: come mai? Il fatto è che la situazione è del tutto diversa: intanto le due figure sono relative *allo stesso rif.* S; poi *non si tratta degli stessi punti* (infatti in fig. 1 i punti sono $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ mentre in fig. 2 sono $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$). Come si legge nel testo, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ sono due punti, il primo della banchina, il secondo del treno, che si trovano a coincidere nell'istante in cui cade il fulmine, e lo stesso per $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$. Ovvio che le distanze debbano essere uguali.

Secondo esempio. Osserviamo il segmento $\mathrm{R}_{\mathcal{A}}\mathrm{R}_{\mathcal{B}}$ nelle due figure. Qui abbiamo a che fare con *gli stessi eventi*, visti da due diversi rif. Misurando (su carta) le lunghezze, trovo 36 mm scarsi in fig. 1, più di 37 mm in fig. 2. Eppure la distanza tra due eventi è invariante: come si spiega?

Qui entra in gioco proprio la differenza tra la geometria di Minkowski e quella di Euclide. Se misuro la distanza con un righello, misuro la distanza *euclidea*, non quella minkowskiana, che non è rappresentata fedelmente nelle figure (e non sarebbe possibile ...). In formule, nella fig. 4 misuro

$$\left[(\Delta x)^2 + (\Delta t)^2\right]^{1/2}$$

invece di

$$\left[(\Delta x)^2 - (\Delta t)^2\right]^{1/2}$$

mentre in fig. 3 la misura è corretta, visto che $\Delta t' = 0$. Dato che $\Delta t = v\,\Delta x$ (perché?) il rapporto tra la distanza euclidea misurata e quella minkowskiana è

$$\sqrt{\frac{1+v^2}{1-v^2}} \simeq 1.04$$

che dà una differenza di 1.5 mm circa: proprio quanto abbiamo trovato.

Quello che i diagrammi dicono (correttamente)

Fin qui abbiamo trovato solo risultati negativi: ciò che una figura non può dirci, dato che non abbiamo modo di determinare direttamente la distanza minkowskiana. Ma allora, come possiamo giustificare il ragionamento che abbiamo fatto sul non sincronismo degli eventi $\mathrm{R}_{\mathcal{A}}$, $\mathrm{R}_{\mathcal{B}}$ nel rif. S? In altre parole: ci sono casi in cui un ragionamento euclideo concorda con ciò che ci direbbe la geometria di Minkowski?

La risposta completa sarebbe lunga; si tratta di un problema genuinamente matematico, e richiede di riflettere su che cosa hanno in comune le due geometrie, a parte le differenze. Qui mi limito ad asserire sinteticamente il risultato, e rimando all'Appendice un'esposizione più ampia.

La geometria euclidea e quella minkowskiana hanno in comune la *struttura affine*, ossia quella in cui non si fa uso di *distanze* (e di conseguenza neppure di angoli). Sono solo definiti i rapporti fra segmenti che stiano sulla stessa retta o su rette parallele. In geometria affine la congruenza fra triangoli può essere definita solo quando i lati sono due a due paralleli; in tal caso si può anche definire la *similitudine*.

Se una tesi da dimostare ha solo *contenuto affine*, è indifferente se nel dimostrarla si usi la geometria euclidea o quella minkowskiana. È questo il caso che c'interessa: si dimostra che in fig. 4 vale la disuguaglianza $\mathrm{E}_{\mathcal{A}}\mathrm{R}_{\mathcal{A}} > \mathrm{E}_{\mathcal{B}}\,\mathrm{R}_{\mathcal{B}}$. Poi che la stessa relazione vale per le altezze, che misurano le differenze dei tempi (in S) tra $\mathrm{E}_{\mathcal{A}}$ ed $\mathrm{R}_{\mathcal{A}}$, tra $\mathrm{E}_{\mathcal{B}}$ ed $\mathrm{R}_{\mathcal{B}}$ rispettivamente (fig. 5).

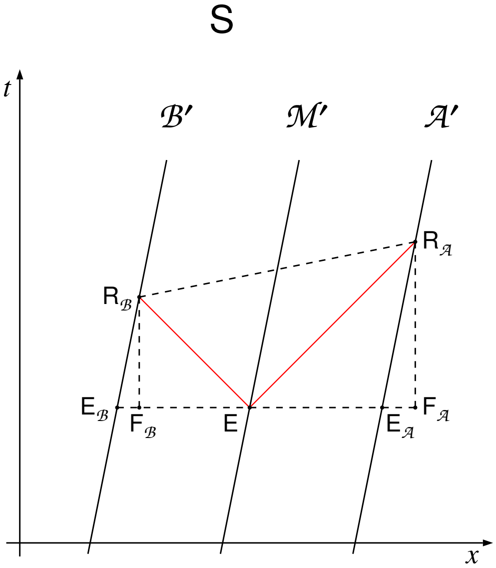

fig. 5

Il confronto tra le altezze sembra euclideo, visto che l'altezza di un triangolo è definita come perpendicolare da un vertice al lato opposto; ma in realtà ciò che conta è che quelle altezze sono parallele all'asse t, e questo è un concetto affine. Per trasferire la disuguaglianza dai segmenti $E_{\mathcal{A}}R_{\mathcal{A}}$, $E_{\mathcal{B}}R_{\mathcal{B}}$ alle dette altezze, basta osservare — se $F_{\mathcal{A}}$, $F_{\mathcal{B}}$ sono i piedi delle due altezze — che i triangoli $E_{\mathcal{A}}R_{\mathcal{A}}F_{\mathcal{A}}$, $E_{\mathcal{B}}R_{\mathcal{B}}F_{\mathcal{B}}$ sono simili (in senso affine) in quanto hanno lati paralleli.

Appendice

1. *Lo spazio affine*

Non intendo proporre qui una trattazione assiomatica né fare un'esposizione completa dell'argomento, ma solo citare alcuni aspetti essenziali. Detto sommariamente, uno spazio affine $\mathcal{A}$ è un insieme in cui è definita un'operazione (*differenza*) sulle coppie di punti, il cui risultato fornisce un *vettore*, ossia un elemento di uno *spazio vettoriale* $\mathcal{V}$. Se $\mathbf{v} = \mathrm{Q} - \mathrm{P}$, si scrive anche

$$\mathrm{Q} = \mathrm{P} + \mathbf{v}.$$

A noi serviranno solo spazi affini sui reali, ossia tali che $\mathcal{V}$ è uno spazio vettoriale sul campo reale $\mathbb{R}$.

La più importante proprietà della differenza è questa: se P, Q sono punti di $\mathcal{A}$, comunque preso un terzo punto R, esiste uno e un solo S tale che

$$\mathrm{Q} - \mathrm{P} = \mathrm{S} - \mathrm{R}. \tag{1}$$

Si definisce *retta* per P, Q l'insieme dei punti T dati da

$$\mathrm{T} = \mathrm{P} + k\,(\mathrm{Q} - \mathrm{P}) \qquad k \in \mathbb{R}.$$

La *parallela* per R alla retta PQ è la retta per R, S con S definito dalla (1).

In uno spazio affine la congruenza fra segmenti (orientati) non è definita in generale, ma lo è quando i segmenti appartengono a rette parallele. Anzi in questo caso è anche possibile definire il *rapporto*. Neppure il confronto tra angoli è possibile, salvo il caso (banale) degli angoli fra coppie di rette a due a due parallele. Tanto meno è definito l'angolo retto.

Anche la congruenza fra triangoli non può essere definita in generale, ma solo quando i lati sono due a due paralleli; in tal caso si può anche definire la *similitudine*.

In uno spazio affine non si può definire la circonferenza, ma una definizione di ellisse è possibile, per es. così: dato un punto C (*centro*) e due punti A, B (estremi di due *diametri coniugati*) l'ellisse con quel centro e quei diametri coniugati è l'insieme dei punti

$$\mathrm{P} = \mathrm{C} + (\mathrm{A} - \mathrm{C})\cos t + (\mathrm{B} - \mathrm{C})\sin t \qquad t \in [0, 2\pi).$$

In modo analogo si definisce l'iperbole; la parabola ha una definizione diversa, ma ancora possibile.

Possiamo anche definire *coordinate cartesiane*, al modo seguente. Scegliamo un punto O e due vettori *indipendenti*, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$. Preso un qualunque punto P, il vettore P − O si può scrivere come combinazione lineare di $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$:

$$\mathrm{P} - \mathrm{O} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y$$

e di conseguenza

$$\mathrm{P} = \mathrm{O} + x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y. \tag{2}$$

Viceversa, quanunque siano $x, y \in \mathbb{R}$ la (2) definisce un punto di $\mathcal{A}$, di cui (x, y) sono le coordinate.

C'è completa arbitrarietà sia nella scelta dell'*origine* O sia in quella dei *vettori base* $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, ed è ovvio che non ha senso parlare di coordinate ortogonali, non essendo definito l'angolo retto.

2. *Lo spazio euclideo*

Se in uno spazio affine lo spazio vettoriale associato viene dotato di un *prodotto scalare definito positivo*, quindi di una *norma* $|\mathbf{v}|$, si può usare questa per definire in $\mathcal{A}$ la *distanza* fra due punti

$$\overline{\mathrm{PQ}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} |\mathrm{Q} - \mathrm{P}| \tag{3}$$

con tutte le note proprietà, prima fra tutte la *disuguaglianza triangolare*:

$$\overline{\mathrm{PR}} \le \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QR}}.$$

In tal modo $\mathcal{A}$ diventa uno *spazio euclideo* $\mathcal{E}$.

In $\mathcal{E}$ si può usare il prodotto scalare di $\mathcal{V}$ per definire l'*angolo* fra due rette (più esattamente fra due *semirette*). Si vede dunque che uno spazio euclideo è uno spazio affine *arricchito* di una struttura addizionale: distanze e angoli. Pertanto in $\mathcal{E}$ ha senso confrontare segmenti comunque diretti, e così pure angoli; definire la circonferenza, ecc.

In $\mathcal{E}$ si possono definire coordinate cartesiane *ortogonali*: basta prendere i vettori base $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, in modo che sia $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0$. Se poi è anche $|\mathbf{e}_x| = |\mathbf{e}_y|$, le coordinate sono *isometriche*.

3. *Lo spazio di Minkowski*

Limitiamoci per semplicità a due sole dimensioni. Allora la definizione di spazio di Minkowski $\mathcal{M}$ differisce da quella di spazio euclideo per un solo aspetto: si assume che il prodotto scalare in $\mathcal{V}$ sia *indefinito*, ossia che esistano vettori per cui $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$ (che in fisica diremo "vettori di tipo tempo") ma anche vettori per cui $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} < 0$ ("vettori di tipo spazio") e quindi anche vettori per cui $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 0$ ("di tipo luce").

La relazione di ortogonalità tra vettori ha senso anche nello spazio di Minkowski: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$. La differenza rispetto a uno spazio euclideo è che ora un vettore può essere ortogonale a se stesso: succede per i vettori di tipo luce. Escluso questo caso, se $\mathbf{u}$ è di tipo tempo, $\mathbf{v}$ è necessariamente di tipo spazio. In due dimensioni è vera anche la proprietà simmetrica: se $\mathbf{u}$ è di tipo spazio, $\mathbf{v}$ è necessariamente di tipo tempo. Ma questo non è più vero in $3+1$ dimensioni: esistono (infiniti) vettori di tipo spazio tra loro ortogonali, anzi se ne possono trovare fino a a tre che siano due a due ortogonali.

Una conseguenza del carattere indefinito del prodotto scalare è che a rigore non si può definire la norma di un vettore. Lo si può fare, in modo un po' artificioso, usando il valore assoluto del prodotto scalare:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}|}.$$

Comunque sia, se si mantiene la (3) come definizione di distanza, non si può più dimostrare la disuguaglianza triangolare. Anzi, tra vettori tutti di tipo tempo futuro (v. fra poco) la disuguaglianza *vale all'inverso*:

$$\overline{\mathrm{PR}} \ge \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QR}}. \tag{4}$$

Se i vettori $\mathrm{Q}-\mathrm{P}$, $\mathrm{R}-\mathrm{Q}$ sono di tipo tempo futuro lo è anche $\mathrm{R}-\mathrm{P}$, e la (4) sta alla base del *paradosso dei gemelli*.

Fissato un punto P, l'insieme dei Q tali che $\mathrm{Q}-\mathrm{P}$ è di tipo tempo consiste di due parti tra loro sconnesse: il *futuro* e il *passato* di P. In due dimensioni lo stesso vale per l'insieme dei Q tali che $\mathrm{Q}-\mathrm{P}$ è di tipo spazio: li diremo *presente destro* e *presente sinistro* di P. Ma in $3+1$ dimensioni c'è differenza: futuro e passato restano disconnessi, ma il presente *è connesso*. Infatti si può girare attorno a P restando sempre nel presente. L'insieme dei Q tali che $\mathrm{Q}-\mathrm{P}$ è di tipo luce è il *cono luce*, che in due dimensioni consiste di due rette.

È usuale introdurre in $\mathcal{M}$ coordinate ortogonali come in $\mathcal{E}$. Per l'applicazione alla relatività i due vettori base si chiamano $\mathbf{e}_x$ e $\mathbf{e}_t$ in due dimensioni; ovviamente $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ ed $\mathbf{e}_t$ in 4 dimensioni. In due dimensioni uno dei vettori è sempre di tipo tempo, l'altro di tipo spazio; in $3+1$ uno è di tipo tempo, gli altri 3 di tipo spazio. Usando la definizione di norma che abbiamo vista, è comune assumere coordinate isometriche.

4. *Coesistenza di $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{E}$*

Un diagramma dello spazio-tempo (in due dimensioni) viene disegnato su un foglio, ed è quindi naturalmente dotato della struttura euclidea accanto a quella minkowskiana. In tutte le fig. 1–4 gli assi x, t sono stati disegnati ortogonali in senso euclideo, e le coordinate sono isometriche in senso minkowskiano. Questo si vede dal fatto che il "cono luce" consiste delle bisettrici degli assi.

La coesistenza delle due strutture comporta che su una figura si possa ragionare in senso euclideo oltre che minkowskiano, come sarebbe d'obbligo per l'interpretazione relativistica. È quello che è accaduto dal fondo di pag. 8 all'inizio di pag. 9. Ricopiamo il ragionamento e analizziamolo in dettaglio.

"Le linee orarie dei lampi partono da E e sono a 45°; i segmenti $\mathrm{EE}_\mathcal{A}$, $\mathrm{EE}_\mathcal{B}$ sono uguali, ma l'angolo in $\mathrm{E}_\mathcal{B}$ è acuto, mentre quello in $\mathrm{E}_\mathcal{A}$ è ottuso: tanto basta per assicurare che $\mathrm{E}_\mathcal{A}\mathrm{R}_\mathcal{A} > \mathrm{E}_\mathcal{B}\,\mathrm{R}_\mathcal{B}$. La stessa relazione vale per le altezze, che misurano le differenze dei tempi (in S) tra $\mathrm{E}_\mathcal{A}$ ed $\mathrm{R}_\mathcal{A}$, tra $\mathrm{E}_\mathcal{B}$ ed $\mathrm{R}_\mathcal{B}$ rispettivamente."

Si parla di rette a 45°; si confrontano i segmenti $\mathrm{EE}_\mathcal{A}$, $\mathrm{EE}_\mathcal{B}$; si dice di un angolo acuto e di uno ottuso. Si scrive una relazione di disuguaglianza tra i segmenti $\mathrm{E}_\mathcal{A}\mathrm{R}_\mathcal{A}$ ed $\mathrm{E}_\mathcal{B}\mathrm{R}_\mathcal{B}$ e poi fra le altezze. Quali fra queste asserzioni dipendono dalla geometria euclidea, e quali no?

Non ne dipende l'uguaglianza di $\mathrm{EE}_\mathcal{A}$ ed $\mathrm{EE}_\mathcal{B}$, che appartengono alla stessa retta. Lo stesso per la relazione fra $\mathrm{E}_\mathcal{A}\mathrm{R}_\mathcal{A}$ ed $\mathrm{E}_\mathcal{B}\,\mathrm{R}_\mathcal{B}$, che stanno su rette parallele. Il confronto tra le altezze sembra euclideo, visto che l'altezza di un triangolo è definita come perpendicolare da un vertice al lato opposto; ma in realtà ciò che conta è che quelle altezze sono parallele all'asse t, e questo è un concetto affine. Per trasferire la disuguaglianza dai segmenti $\mathrm{E}_\mathcal{A}\mathrm{R}_\mathcal{A}$, $\mathrm{E}_\mathcal{B}\,\mathrm{R}_\mathcal{B}$ alle dette altezze, basta osservare — se $\mathrm{F}_\mathcal{A}$, $\mathrm{F}_\mathcal{B}$ sono i piedi delle due altezze — che i triangoli $\mathrm{E}_\mathcal{A}\mathrm{R}_\mathcal{A}\mathrm{F}_\mathcal{A}$, $\mathrm{E}_\mathcal{B}\,\mathrm{R}_\mathcal{B}\,\mathrm{F}_\mathcal{B}$ sono simili (in senso affine) in quanto hanno lati paralleli.

Restano dunque le rette a 45° e gli angoli acuto e ottuso. Questi sono concetti euclidei, e quindi la dimostrazione che $\mathrm{E}_\mathcal{A}\mathrm{R}_\mathcal{A} > \mathrm{E}_\mathcal{B}\mathrm{R}_\mathcal{B}$ è anch'essa euclidea, come lo è la disuguglianza stessa. Da questa deduciamo $\mathrm{F}_\mathcal{A}\mathrm{R}_\mathcal{A} > \mathrm{F}_\mathcal{B}\mathrm{R}_\mathcal{B}$, ancora in modo euclideo. Però, come abbiamo visto, questa disuguaglianza ha un significato affine, e quindi rimane significativa (e valida) anche in $\mathcal{M}$, che è quanto a noi interessa.