

Rivelatori inerziali di onde gravitazionali

Introduzione

Con “rivelatore inerziale” intendo un rivelatore tipo LIGO (VIRGO), in cui si hanno corpi idealmente liberi le cui variazioni di distanza sotto l’azione di un’o.g. vengono rivelate per via interferometrica.

Tratterò il problema schematizzandolo come segue:

- i corpi (specchi) come già detto sono liberi, quindi in moto geodetico
- tra gli specchi viaggia un impulso luminoso di cui si misura il tempo di andata e ritorno.

Voglio vedere come il passaggio di un’o.g. influisce su questo tempo.

Metrica e geodetiche

Assumo che tutto avvenga in uno spazio-tempo di base *piatto*, che viene solo perturbato dall’onda gravitazionale incidente. Ciò non è esattamente vero per esperimenti fatti sulla Terra, ma la cosa si può giustificare ugualmente [1]. Per quanto riguarda gli specchi, anche se questi non sono in caduta libera nel campo della Terra, e quindi non seguono vere geodetiche della geometria, ciò rimane vero per le componenti orizzontali. Per la luce che va e viene tra gli specchi, il solo effetto sarebbe la deflessione gravitazionale, che risulta trascurabile.

Con riferimento a [2] pongo dunque

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (|h_{\alpha\beta}| \ll 1).$$

Se l’asse $z = x^3$ è preso nella direzione di propagazione dell’onda, la condizione TT (trasverso a traccia nulla) impone che solo le componenti h_{xx} , h_{xy} , h_{yy} ($x = x^1$, $y = x^2$) siano non nulle. Posso limitarmi, senza restrizione importante, a considerare onde +, ossia $h_{xy} = 0$, $h_{yy} = -h_{xx}$. Per un’onda piana monocromatica potremo porre ⁽¹⁾

$$h_{xx} = -h_{yy} = a \cos k(z - t) \quad (a \text{ costante}, c = 1).$$

Uso degli integrali primi

Con riferimento alla (6-13) di [2], abbiamo

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \left[g_{tt} (u^t)^2 + g_{xx} (u^x)^2 + g_{yy} (u^y)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(u^t)^2 - (1 - a \cos kt) (u^x)^2 - (1 + a \cos kt) (u^y)^2 \right] \end{aligned} \quad (1)$$

(ho tralasciato z , fissata al valore 0).

⁽¹⁾ Questa in realtà è corretta solo al primo ordine in a , ordine di approssimazione al quale mi atterrò nel seguito.

Oltre all'integrale primo W , di cui ho già detto, ce ne sono altri due:

$$\begin{aligned} A &= (1 - a \cos kt) u^x \\ B &= (1 + a \cos kt) u^y. \end{aligned} \quad (2)$$

Posso usare le (2) per eliminare u^x , u^y dalla (1):

$$W = \frac{1}{2} \left[(u^t)^2 - \frac{A^2}{(1 - a \cos kt)} - \frac{B^2}{(1 + a \cos kt)} \right]. \quad (3)$$

Geodetiche di tipo tempo

Per una geodetica di tipo tempo $2W = 1$:

$$(u^t)^2 - \frac{A^2}{(1 - a \cos kt)} - \frac{B^2}{(1 + a \cos kt)} = 1. \quad (4)$$

In particolare possiamo scegliere $A = B = 0$ e le (2) ci danno $u^x = u^y = 0$, ossia una geodetica lungo la quale x , y restano costanti. Abbiamo anche $z = 0$, e dalla (4) $u^t = 1$, ossia t e τ coincidono (l'origine di τ si può scegliere liberamente).

Sembra un risultato banale, ma non lo è. Se infatti prendiamo due punti le cui coordinate differiscono solo per la x , abbiamo sì $x_1 - x_2 = \text{cost.}$ (indip. da τ lungo le geodetiche) ma la distanza propria non rimane costante, dato che vale

$$\sqrt{-g_{xx}} |x_1 - x_2| = (1 - a \cos kt)^{1/2} |x_1 - x_2| \simeq \left(1 - \frac{1}{2} a \cos kt\right) |x_1 - x_2| \quad (5)$$

al primo ordine in a . Se prendiamo due punti lungo y abbiamo invece

$$\sqrt{-g_{yy}} |y_1 - y_2| = (1 + a \cos kt)^{1/2} |y_1 - y_2| \simeq \left(1 + \frac{1}{2} a \cos kt\right) |y_1 - y_2|.$$

Geodetiche di tipo luce

In questo caso $W = 0$:

$$(u^t)^2 - \frac{A^2}{(1 - a \cos kt)} - \frac{B^2}{(1 + a \cos kt)} = 0.$$

Se per es. poniamo $B = 0$, soltanto u^x , u^t sono non nulle. Posso porre $A = 1$ senza perdere generalità, e trovo

$$u^t = (1 - a \cos kt)^{-1/2}$$

(il segno opposto per u^t cambierebbe il verso di λ , senza cambiare la fisica). Questa insieme alla prima delle (2) dice

$$\frac{dx}{dt} = (1 - a \cos kt)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2} a \cos kt \quad (6)$$

che integrata con la condizione iniziale $x(t_0) = 0$ fornisce

$$x = t - t_0 + \frac{a}{2k} (\sin kt - \sin kt_0).$$

Questa geodetica corrisponde a un lampo luminoso che parte al tempo t_0 da uno specchio posto in $x = 0$ e si propaga nel verso delle x crescenti. Il lampo arriva sullo specchio posto in $x = L$ al tempo t_1 dato da

$$L = t_1 - t_0 + \frac{a}{2k} (\sin kt_1 - \sin kt_0). \quad (7)$$

La (7) può essere risolta per t_1 se si suppone piccola la differenza $t_1 - t_0$; più esattamente, se $k(t_1 - t_0) \ll 1$. In quest'ipotesi abbiamo

$$\begin{aligned} L &\simeq (t_1 - t_0) \left(1 + \frac{1}{2} a \cos kt_0\right) \\ t_1 - t_0 &\simeq L \left(1 - \frac{1}{2} a \cos kt_0\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Per avere la propagazione in senso contrario basta prendere $A = -1$: allora u^x cambia segno, e al posto della (6) si ottiene

$$\frac{dx}{dt} \simeq -1 - \frac{1}{2} a \cos kt.$$

Integrando con la condizione $x(t_1) = L$ si ha

$$x = L - (t - t_1) - \frac{a}{2k} (\sin kt - \sin kt_1).$$

Detto t_2 l'istante di ritorno sul primo specchio, abbiamo

$$\begin{aligned} L &\simeq (t_2 - t_1) \left(1 + \frac{1}{2} a \cos kt_1\right) \\ t_2 - t_1 &\simeq L \left(1 - \frac{1}{2} a \cos kt_1\right). \end{aligned} \quad (9)$$

con l'ipotesi $k(t_2 - t_1) \ll 1$.

Le (8) e (9) mostrano (era ovvio) che i tempi di andata e ritorno sono pressoché uguali (sono proprio uguali se si trascura la differenza fra t_0 e t_1 a secondo membro) e valgono circa L . Le ipotesi fatte per arrivare alle (8), (9) sono soddisfatte se il tempo di andata e ritorno della luce tra gli specchi è $\ll T/2\pi$, T essendo il periodo dell'onda gravitazionale.

Sommando le due relazioni e confondendo t_1 con t_0 :

$$t_2 - t_0 \simeq 2L \left(1 - \frac{1}{2} a \cos kt_0\right). \quad (10)$$

La (10) mostra come la misura del tempo di andata e ritorno permetta di conoscere a . Osserviamo anche che il segno meno deriva dalla scelta che è stata fatta della fase di h : se $a > 0$, intorno a $t = 0$ l'onda causa un avvicinamento degli specchi, come si vede dalla (5).

- [1] Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler: *Gravitation*, Cap. 37.
- [2] <http://www.sagredo.eu/lezioni/irg/irg19.pdf>
- [3] Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler: *Gravitation*, Cap. 35.